File ID	uvapub:76396
Filename	324423.pdf
Version	final

SOURCE (OR PART OF THE FOLLOWING SOURCE):

Type	article
Title	Mathematische muziektheorie: Nieuwe mogelijkheden voor muziekgerelateerd onderzoek
Author(s)	A. Honingh, A. Volk
Faculty	FNWI: Institute for Logic, Language and Computation (ILLC)
Year	2009

FULL BIBLIOGRAPHIC DETAILS:
http://hdl.handle.net/11245/1.324423

Mathematische muziektheorie: Nieuwe mogelijkheden voor muziekgerelateerd onderzoek

ALINE HONINGH EN ANJA VOLK

Mathematische muziektheorie is een vakgebied in opkomst. Muziek en wiskunde hebben een oeroude relatie (denk bijvoorbeeld aan Pythagoras, Kepler, Descartes en Euler), en ook nu blijken er steeds meer elementen binnen de huidige muziektheorie te profiteren van een wiskundige aanpak. In dit artikel beschrijven we een aantal voorbeelden van theoretisch, cognitief en computationeel onderzoek rond muziek waarbij een heel scala wiskundige technieken is gebruikt. Verder zullen we aandacht besteden aan de uitdagingen en problemen die er in dit vakgebied zijn, en kijken naar computationele modellen en toepassingen.

1 Inleiding

De meeste mensen denken bij de combinatie van muziek en wiskunde aan de door Pythagoras ontdekte getalsverhoudingen van intervallen zoals de kwint (3/2) en het octaaf (2/1) en aan de stemmingsproblematiek die daarmee gepaard gaat (Van de Craats 1989; Benson 2006). Er zijn echter veel meer verbanden tussen muziek en wiskunde. De relatie tussen muziek en wiskunde loopt van concertzalen (Barron 2008) en perceptie van geluid (Jeans 1968), tot muziekanalyse (Forte 1973; Lewin 1987), compositie (Norden 1964; Adams 1996; Kramer 1973) en muziekcognitie (zie paragraaf 5). Hoewel wiskunde ook wordt gebruikt in onderzoek naar geluid en akoestiek (Tramo & al. 2001; Smoorenburg 1970; Plomp & Levelt 1965), zullen we ons in dit artikel concentreren op wiskunde in verband met muziektheorie en muziekcognitie, gebieden die vaak gebaseerd zijn op de symbolische notatie van muziek. Dit vakgebied wordt soms aangeduid als mathematische muziektheorie. Twee jaar geleden zijn een tijdschrift (*Journal of Mathematics and Music*) en een organisatie (Society for Mathematics and Computation in Music) opgericht speciaal voor onderzoekers en musici die zich begeven in het interdisciplinaire vakgebied tussen muziek, wiskunde en informatica.

Deze bijdrage is als volgt opgebouwd. Allereerst zullen we kijken naar relaties tussen muziek en wiskunde en twee voorbeelden uitlichten van wiskundige modellen binnen de muziektheorie. Aan de hand van deze voorbeelden kan een indruk worden verkregen van wat er mogelijk is, en hoe wiskunde gebruikt kan worden om aspecten binnen de muziek in kaart te brengen. In paragraaf 3 wordt ingegaan op de functe die wiskunde kan vervullen bij het formuleren van theorieën. Er worden twee typen modellen beschreven die typerend zijn voor de traditionele muziektheorie en er wordt beschreven hoe deze samenhangen met mathematische muziektheorie. In paragraaf 4 wordt aandacht besteed aan mogelijke problemen en uitdagingen die bij een nieuw vakgebied als mathematische muziektheorie een rol spelen. Ten slotte bekijken we in paragraaf 5 een aantal computationele toepassingen van wiskundige modellen.

2 Relaties tussen muziek en wiskunde

Hieronder volgen twee voorbeelden van muziekgerelateerd onderzoek die elk gebruik maken van een ander soort wiskunde. Het CQT model in paragraaf 2.1 maakt gebruik van topologie en heeft als doel structurele elementen van muziek te beschrijven. De pitch-class-settheorie in paragraaf 2.2 maakt gebruik van discrete wiskunde en heeft als doel muziek te analyseren. De modellen behoren hierdoor ieder tot een ander soort muziekmodel, iets waar we in paragraaf 3 verder op in zullen gaan.

De auteurs willen Frans Wiering, Remco Veltkamp, Peter van Kranenburg en Hylke de Vries bedanken voor verhelderende discussies en suggesties.

2.1 CQT-Ruimte

Een zogenaamde stemvoeringsruimte of CQT-ruimte is beschreven met een geometrisch model door Clifton Callender, Ian Quinn en Dmitri Tymoczko (vandaar CQT; Callender & al. 2008). Deze CQT-ruimte heeft een aantal equivalentieklassen als basis, die worden aangeduid met de letters OPTIC: Octaafequivalentie, Permutatie- of herordeningsequivalentie, Transpositie-equivalentie, Inversie-equivalentie, en Cardinaliteitsequivalentie (het verwaarlozen van herhalingen). De auteurs menen dat deze OPTIC-equivalentieklassen cruciale elementen vormen binnen de Westerse muziek, tenminste al sinds de zeventiende eeuw. Een aantal muzikale structuren kunnen worden beschreven met een combinatie van een of meer OPTIC-klassen. Zo kunnen melodieën beschreven worden door T: een getransponeerde melodie is nog steeds dezelfde melodie. Akkoorden kunnen beschreven worden door OPC: we kunnen spreken van een C-groot akkoord zonder dat het ons uitmaakt om welke C het precies gaat (octaafequivalentie), de noten kunnen onderling verwisseld worden zonder dat het akkoord verandert (permutatie-equivalentie), en het aantal C's of G's in het akkoord maakt niet uit voor de akkoordnaam (cardinaliteitsequivalentie). Pitch-class-sets, zoals beschreven in de volgende paragraaf, voldoen aan OPTIC: alle beschreven equivalentieklassen[1] zijn hier van toepassing. Er kunnen equivalentierelaties van alle mogelijke combinaties van de OPTIC klassen gevormd worden, wat resulteert in $2^5 = 32$ mogelijkheden.[2]

Het geometrische CQT-model kan men zich als volgt voorstellen. Noten worden gerepresenteerd door de logaritmen van hun grondfrequentie en corresponderen dan met reële getallen.[3] Een reeks van n noten kan op deze manier voorgesteld worden door een punt in een n-dimensionale ruimte. De vier OPTI-equivalentieklassen creëren zogenaamde quotiëntruimtes door punten in de betreffende n-dimensionale ruimte te identificeren (ofwel, 'aan elkaar te plakken'), en daarmee het aantal dimensies van de ruimte te reduceren. Octaafequivalentie identificeert bijvoorbeeld de pitch-classes n en $n + 12$.

Figuur 1 is een representatie van de CQT-ruimte in drie dimensies. De punten (bolletjes) in de ruimte stellen sets met noten voor. Punten die dicht bij elkaar liggen in de ruimte 'lijken' op elkaar. Bijvoorbeeld, het punt dat een C-groot akkoord voorstelt ligt dicht bij het punt dat een C-klein akkoord voorstelt. En een C-groot akkoord in reine stemming ligt heel dicht bij een C-groot akkoord in een andere stemming (bijvoorbeeld de gelijkzwevende stemming).[4] Ook punten (sets van noten) die op elkaar lijken omdat ze een toonladdertranspositie van elkaar zijn, liggen dicht bij elkaar in deze ruimte. Toonladdertransposities zijn transposities langs een toonladder, waarbij niet bij alle punten hetzelfde interval wordt opgeteld zoals bij gewone (exacte) transposities, maar waarbij een melodie een of meer stapjes kan worden opgeschoven in de toonladder. Fragmenten zoals C-D-E en D-E-F zijn voorbeelden van toonladdertransposities. Over beide voorbeelden, de verschillende stemmingen en de toonladdertransposities, zou men dus kunnen zeggen dat hoe dichter de punten bij elkaar liggen, hoe meer ze op elkaar lijken. De CQT-ruimte is de eerste gepubliceerde beschrijving van een ruimte die dit verschijnsel modelleert.

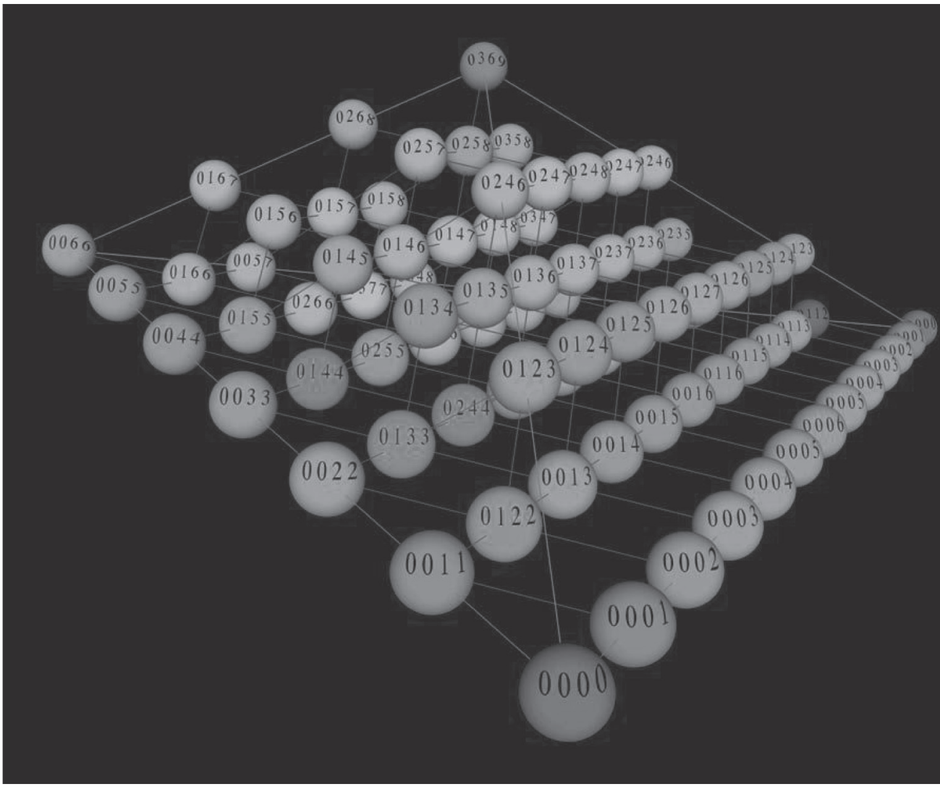
De nieuwe CQT-ruimte geeft veel mogelijkheden om muziekfragmenten geometrisch te modelleren hetgeen van pas kan komen bij de analyse van muziek. Een stemvoering is een overgang van een akkoord naar een ander akkoord. In de

1 Een equivalentieklasse bevat objecten die volgens een bepaalde afbeelding equivalent zijn. Bijvoorbeeld, alle C's in verschillende octaven vormen een equivalentieklasse volgens octaaftranspositie.

2 Iedere klasse kan wel of niet meedoen, dat zijn 2 mogelijkheden. In totaal zijn er 5 verschillende equivalentieklassen. Dit resulteert in $2^5 = 32$ mogelijke combinaties.

3 Dit wordt zo gedaan omdat de perceptie van toonhoogte logaritmisch werkt. Dit betekent bijvoorbeeld dat tussen twee tonen van 220 Hz en 440 Hz dezelfde afstand wordt waargenomen als tussen twee tonen van 440 Hz en 880 Hz.

4 In Figuur 1 representeren de noten sets (bolletjes) slechts een punt, bijvoorbeeld de set in gelijkzwevende stemming. Echter, de ruimte R^n is een continue ruimte waarin dezelfde set in een andere stemming (hoewel niet weergegeven in de figuur) vlakbij de set in gelijkzwevende stemming ligt. Voor meer informatie, zie Callender et al. 2008.



Figuur 1
CQT-Ruimte uit Callender & al. (2008) in drie dimensies. Ieder bolletje stelt een set noten voor die aangegeven worden door de getallen op het bolletje. Gereproduceerd met toestemming van de American Association for the Advancement of Science.

CQT-ruimte wordt deze overgang gerepresenteerd door een verbindingslijn van het ene punt (dat een representatie is van akkoord 1) naar het andere punt (dat een representatie is van akkoord 2). De 'omvang' van een stemvoering hangt af van de beweging in de verschillende stemmen tussen de akkoorden. Het vinden van de kleinste afstand tussen twee punten in de CQT-ruimte correspondeert met de hypothese dat componisten proberen deze omvang zo klein mogelijk te maken.

2.2 Pitch-class-set-theorie

Een bekend voorbeeld van een analytisch systeem dat gebaseerd is op een wiskundige aanpak is de pitch-class-set-theorie, geïntroduceerd door Allen Forte in 1973. Door zijn mathematische karakter is deze theorie geschikt om te gebruiken voor computationele doeleinden, zodat het mogelijk is analytische routines op grote schaal uit te voeren. Aan het eind van deze paragraaf zullen we het computationele model van Szeto & Wong (2006) beschrijven.

Een pitch-class is een getal tussen 0 en 11 en vormt daarmee een abstractie van een muzieknoot. Een pitch-class representeert een noot onder octaafequivalentie en enharmonische equivalentie. De twaalf pitch-classes vormen de halve toonsafstanden uit een octaaf: de chromatische toonladder. Een pitch-class-set is een groepje pitch-classes waarin geen herhalingen mogen voorkomen. De toonreeks C, D♭, G, C, A, G wordt bijvoorbeeld gerepresenteerd (als de keuze C = 0 wordt gemaakt) door de pitch-class-set {0, 1, 7, 9}. De set houdt dus geen rekening met volgorde of herhalingen. Zo representeert deze set {0, 1, 7, 9} alle akkoorden en melodieën die gemaakt kunnen worden met deze vier pitch-classes (inclusief herhalingen).
Forte beschrijft in zijn pitch-class-set-theorie verscheidene operaties op een pitch-class-set. Een voorbeeld is transpositie: een getal kan worden opgeteld bij alle elementen in de set. De set {0, 1, 4} kan bijvoorbeeld getransponeerd worden over een grote terts, een afstand die overeen komt met 4 eenheden in de pitch-

class-representatie, en resulteert dan in de set {4, 5, 8}. De muzikale betekenis van deze operatie is direct duidelijk. Een akkoord of melodie kan getransponeerd worden over een bepaalde afstand maar het resultaat is nog steeds herkenbaar als hetzelfde akkoord of dezelfde melodie. Transpositie is een bekende operatie en wordt in zowel tonale als atonale muziek gebruikt. Opgemerkt dient te worden dat de permutatie-equivalentie en het feit dat in de pitch-class-set de herhalingen zijn weggelaten het wel iets lastiger maken om een getransponeerde melodie inderdaad te herkennen, maar voor bijvoorbeeld akkoorden levert dit nauwelijks problemen op.

Naast transpositie zijn ook andere operaties mogelijk zoals inversie (elke pitch-class wordt afgetrokken van een bepaald getal en op het resultaat wordt de operatie modulo 12 toegepast) en multiplicatie (elke pitch-class wordt vermenigvuldigd met een getal en op het resultaat wordt de operatie modulo 12 toegepast). Er is discussie mogelijk of deze operaties voor de luisteraar herkenbaar zijn in de muziek, en ook of deze operaties de werkwijze van de componist weergeven. Onderzoek hiernaar geeft tegenstrijdige antwoorden (Stammers 1994, Samplaski 2004).

Harmonische of melodische collecties van pitch-class-sets kunnen geanalyseerd worden met behulp van de pitch-class-set-theorie. Elke combinatie van tonen kan uitgedrukt worden in een pitch-class-set. Echter, deze combinatie van tonen kan slechts als structureel worden beschouwd als het in relatie staat tot een andere combinatie van tonen door middel van een of meer pitch-class-set-operaties (zoals de bovengenoemde transpositie, inversie en multiplicatie; Schuijer 2008). Op deze manier zou structuur kunnen worden aangebracht in de op het eerste gezicht soms ongeordend lijkende atonale muziek. De pitch-class-set-theorie is tot op heden de meest gebruikte methode om atonale muziek te analyseren.

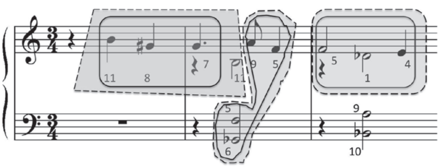
Pitch-class-set-theorie heeft reeds een aantal computationele toepassingen geïnitieerd. Een belangrijke motivatie voor het ontwikkelen van computationele modellen is dat het de analytische routines binnen de pitch-class-set-theorie vergemakkelijkt. Het is moeilijk om verscheidene composities met de hand te vergelijken: studies op grote schaal vereisen een effectief computationeel systeem dat met dit soort analyses om kan gaan.

Szeto & Wong (2006) hebben een computationeel model ontwikkeld dat patroonherkenning realiseert. Het doel is alle instanties van een bepaald patroon van pitch-classes te herkennen in een database van muziek. De condities die aan de herkenning van het patroon ten grondslag liggen zijn afgeleid van de pitch-class-set-theorie. Het model is gebaseerd op de grafentheorie. Een stuk muziek wordt voorgesteld als een graaf waarbij iedere noot gerepresenteerd wordt als een knoop en de relatie tussen een paar noten als een lijn. Waarnemingsaspecten van muziek worden in acht genomen door 'stream segregation', een model betreffende de perceptieve organisatie van muziek, te gebruiken bij de herkenningscondities. Het model is toegepast op Schoenbergs *Klavierstück*, op. 11, nr. 1, en de resultaten zijn vergeleken met muziektheoretische studies van hetzelfde stuk. Verschillende auteurs hebben reeds gedemonstreerd dat de TTI-equivalentieklasse – de equivalentieklasse met betrekking tot transpositie en inversie – van de set {0, 1, 4} veelvuldig gebruikt wordt in dit stuk. Alle 216 TTI-equivalentie klassen worden geteld en het blijkt dat de set {0, 1, 4} in deze hoedanigheid het vaakst voorkomt, wat de eerdere observaties van muziektheoretici bevestigt.

De grafentheoretische aanpak kan worden vergeleken met een analyse van de TTI-equivalentieklassen van {0, 1, 4} zoals gedaan door Wittlich (1974). Voor een voorbeeld hiervan verwijzen we naar Figuur 2 waarin een vergelijking gemaakt wordt tussen de pitch-class-sets die gevonden zijn door de grafentheoretische benadering van Szeto en Wong en de pitch-class-sets gevonden door Wittlich in het begin van Schoenbergs *Klavierstück*, op. 11, nr. 1. Het computationele model detecteert bijna alle pitch-class-sets die door Wittlich gevonden waren, en vindt zelfs meer sets dan die welke door Wittlich zijn beschreven. Sommige van de nieuw gevonden sets zijn mogelijk muzikaal interessant. Het model suggereert op deze manier kandidaten voor verder onderzoek naar de TTI-equivalentieklassen van {0, 1, 4} in Schoenbergs *Klavierstück*. De auteurs voorzien dat hun model gebruikt gaat worden voor vergelijkend onderzoek van composities van dezelfde of van verschillende componisten, hetgeen inzichten kan geven in de volgende vragen: (1) Hoe worden pitch-class-sets gebruikt in een stuk muziek?, (2) Kan er een specifiek gebruik van

pitch-class-sets door een bepaalde componist ontdekt worden?, en (3) Zijn er bepaalde pitch-class-sets die door post-tonale componisten veelvuldig gebruikt worden?

Figuur 2



Voorbeelden van de TTI-equivalentieklasse van de pitch-class-set {0,1,4} in de eerste drie maten van Schoenbergs *Klavierstück,* op. 11, nr. 1. De sets noten omgeven door een aaneengesloten lijn zijn geïdentificeerd door de grafentheoretische benadering van Szeto & Wong (2006). De sets noten omgeven door een streepjeslijn behoren tot Wittlichs analyse (1974). De gelocaliseerde TTI-equivalentieklassen door Szeto & Wong komen volledig overeen met die van Wittlich in maat 2 en 3. De TTI-equivalentieklasse in maat 1 verschilt slechts door een duplicatie van pitch-class 11.

3 Modellen

Dat modellen nuttig zijn behoeft geen betoog. Modellen gaan gepaard met abstracties, zoals we bijvoorbeeld zagen in het bovengenoemde onderzoek. Als we spreken over 'pitch-classes' in plaats van noten, wordt veel informatie over noten weggelaten die in bepaalde gevallen van groot belang is en in andere gevallen minder belangrijk is. Een auteur die een model presenteert dat bepaalde abstracties hanteert gaat ervan uit dat de specifieke details minder belangrijk zijn dan het grotere beeld van het hele model. Zo is de aanname dat de pitch-class een goed model is voor een toon in een stuk atonale muziek.

Er bestaan verschillende soorten modellen en theorieën. Muziektheorie bevat verschillende methoden die grofweg in twee groepen kunnen worden verdeeld: enerzijds theorieën die expliciet als doel hebben een bepaald muziekstuk te analyseren, zoals bijvoorbeeld Schenkeriaanse analyse (e.g. Schenker 1906) of analyse met behulp van pitch-class-set-theorie (zie paragraaf 2.2; Forte 1973), en anderszijds theorieën die werken op een meer abstract en filosofisch niveau. Theorieën die in de tweede groep vallen gaan bijvoorbeeld over de grondslagen van de muziek zoals toonladders en ander materiaal waar muziekstukken op gebaseerd zijn. Er bestaan vaak geen duidelijke verbindingen tussen deze twee groepen theorieën. Mathematische modellen van muziek komen voor in beide categorieën maar bevinden zich doorgaans meer aan de kant van het abstracte niveau.

We zullen hier een aantal voorbeelden noemen van mathematische modellen in bovengenoemde categorieën. Zoals we gezien hebben, is de pitch-class-set-theorie een duidelijk voorbeeld van een mathematische theorie die het doel heeft om een stuk muziek te analyseren. Een andere mathematische theorie die analyse als doel heeft is bijvoorbeeld de transformationele theorie ontwikkeld door David Lewin (1987). De transformationele theorie, die gebruikt kan worden voor zowel tonale als atonale muziek, definieert operaties op een mathematische groep en kan op deze manier potentiële muzikale gebeurtenissen representeren. De resulterende analyses laten zien hoe een bepaalde muzikale gebeurtenis getransformeerd wordt in een andere. Een tak van de transformationele theorie is de Neo-Riemanniaanse theorie die ontstaan is als antwoord op het probleem om negentiende-eeuwse chromatische muziek, zoals de muziek van Wagner en Liszt, te analyseren. Deze muziek is niet atonaal maar gebaseerd op drieklanken, maar desondanks zijn de analytische modellen bedoeld voor diatonische muziek vaak niet geschikt voor deze muziek. De Neo-Riemanniaanse theorie is gecentreerd rond drie specifieke operaties op drieklanken. Deze operaties worden gebruikt om tonen van een drieklank te verschuiven naar een naastgelegen toon in de toonladder, terwijl tenminste een van de tonen gelijk wordt gehouden. Met deze operaties kunnen akkoordovergangen beschreven worden.

Naast deze analysetechnieken kan ook nog een ander type onderzoek genoemd worden dat binnen de eerste categorie valt, namelijk de studies binnen de mathematische muziektheorie die geïnspireerd zijn door een muziektheoretische uitdaging van een concreet stuk muziek of een bepaalde muziekstijl. Voorbeelden hiervan zijn de onderzoeken naar de perceptie van accenten in twintigste-eeuwse muziek (Roeder 1995), de relatie tussen toonhoogte en temporele proces-

sen in een capriccio van Brahms (Lewin 1981), en de ritmische structuur van de muziek van Steve Reich (Cohn 1992).

Anders dan de eerste categorie, die zich direct richt op muziekstukken of op een bepaalde stijl of stroming, kan in de tweede categorie onderzoek gevonden worden dat zich meer richt op de grondslagen van de muziek. Voorbeelden van de tweede categorie zijn bijvoorbeeld modellen van toonladders (Carey & Clampitt 1989; Balzano 1980; Honingh & Bod 2005; Agmon 1989; Clough & Myerson 1985; Clough & Douthett 1991). Een aantal algemeen geldige wiskundige eigenschappen van toonladders zijn in kaart gebracht, vaak in termen van wiskundige groepentheorie. Dit is interessant om een aantal redenen. Allereerst kan de definitie van een toonladder hiermee preciezer gemaakt worden. Ten tweede kunnen deze eigenschappen worden gebruikt om nieuwe toonladders te ontwikkelen. En als laatste kunnen deze eigenschappen nieuwe inzichten over muziek geven en daarmee bijdragen tot de verklaring voor de oorsprong van bepaalde toonladders. Balzano (1980) heeft bijvoorbeeld onderzoek gedaan naar groepentheoretische eigenschappen van microtonale toonsystemen, en trekt het belang van frequentieverhoudingen als verklaring voor de oorsprong van het twaalftoonsysteem in twijfel door te zeggen dat "it may well be that the group-theoretic properties (...) were the more perceptually important all along."

Een ander voorbeeld van de tweede categorie is het onderwerp stemmingen en intonatie. Niet alleen is wiskunde gebruikt om de stemmingsproblematiek in kaart te brengen, er is zelfs een flink aantal alternatieve stemmings- en intonatiesystemen ontwikkeld op basis van discrete wiskunde. Een aantal onderzoekers heeft zich afgevraagd welke alternatieven er zijn voor bijvoorbeeld de zuivere stemming (Partch 1974/1949; Yasser 1975) of de gelijkzwevende stemming (Fokker 1955; Balzano 1980; Honingh 2006).

Ondanks het feit dat de modellen uit de tweede categorie niet gemaakt zijn om een bepaald muziekstuk te analyseren, kan een model uit deze categorie soms toch met een muziekstuk geassocieerd worden. Dit is het geval als een studie binnen de mathematische muziektheorie uitgaat van een algemene theorie die toegepast wordt op een concreet stuk muziek. Voorbeelden hiervan zijn een topologisch model van motiefanalyse toegepast op Schumanns *Träumerei* (Buteau & Mazzola 2008) dat de karakteristieke motieven van het stuk bepaalt, en een topologisch model van het fenomeen 'consonantie en dissonantie' dat analytische inzichten geeft in Skrjabins *Étude*, op. 65, nr. 3. (Noll & Volk 2005).

4 Uitdagingen

Het nieuwe tijdschrift *Journal of Mathematics and Music* gaat ervan uit dat niet meer alle basiswiskunde uitgelegd hoeft te worden aan het begin van een artikel. Het tijdschrift veronderstelt een basiskennis van wiskunde zodat in de gepubliceerde artikelen snel meer diepgang bereikt kan worden. Dit is aan de ene kant natuurlijk prettig, maar aan de andere kant komt dit vakgebied op deze manier verder af te staan van andere disciplines doordat sommige artikelen voor veel mensen onbegrijpelijk zijn geworden. En dat is jammer.

Verder wordt er soms kritiek geuit op het mathematische karakter van onderzoek binnen dit vakgebied. Sommige mensen lijken helemaal niet geïnteresseerd in onderzoek dat zo abstract is dat het niet meteen resultaten oplevert. "Maar wat betekent dit dan?", of "Dit is zo algemeen dat het niets betekent", of juist "Dit is zo abstract dat het de werkelijkheid helemaal niet goed weergeeft" zijn opmerkingen die vaak gehoord zijn. Dit soort kritiek wordt geuit op modellen en theorieën die zo nieuw zijn dat het moeilijk is ze op waarde te schatten, zoals de CQT-theorie. De CQT-theorie is, in tegenstelling tot de pitch-class-set-theorie, nog nauwelijks toegepast op muziekproblematiek. Het model is gepresenteerd als een basis voor vele mogelijke toepassingen. Echter, zonder deze toepassingen kan het moeilijk zijn om de waarde van het model in te schatten. Het model abstraheert op veel gebieden van de muzikale realiteit, en de waarde van abstracties wordt vaak duidelijker in concrete toepassingen.

Een voorbeeld van onderzoek binnen de mathematische muziektheorie dat algemene waardering kent, is het werk van David Lewin. Lewin, de grondlegger van de transformationele theorie, werd en wordt geroemd door mensen uit diverse vakgebieden en zelfs door de pers : het in memoriam in de New York Times noemde zijn invloed "buitengewoon." (Rothstein 2003).

Wiskundige methoden komen nauwelijks voor in het curriculum van de muziekwetenschappelijke opleidingen. Zelfs de pitch-class-set-theo-

rie en de transformationele theorie, die toch belangrijke analysemethoden zijn voor muziek, zijn doorgaans geen gebieden waarin musicologen zich verdiepen, althans in Nederland en de rest van Europa. In Amerika, echter, worden steeds meer cursussen pitch-class-set-theorie en transformationele theorie aangeboden binnen de studie 'music' en soms zelfs binnen de studie 'mathematics'. Het zou voor wederzijds begrip tussen wiskundigen en musicologen erg helpen als dit soort cursussen ook buiten Amerika aangeboden zouden worden.

Sommige communicatieproblemen lijken met name te ontstaan door het hoge abstractieniveau dat wiskundig onderzoek kan hebben. Een deel van deze problemen zal zichzelf oplossen in de tijd: goed onderzoek zal door de jaren heen steeds meer geciteerd en uitgediept worden (zoals ook gebeurd is met de pitch-class-set-theorie) zodat er een bredere context ontstaat waardoor ook mensen met een mindere wiskundige achtergrond hiermee kunnen werken.

Ter vergelijking: terwijl computationele methoden in onderzoek naar muziek al gebruikt worden sinds de jaren vijftig, zijn deze lang ondervertegenwoordigd gebleven in dit vakgebied. Een van de redenen hiervoor was dat de resultaten van het computationeel modelleren niet overtuigend genoeg waren voor traditionele musicologen om meer tijd te investeren in deze methoden. Dit is de laatste decennia veranderd door de massale digitalisering van muziek en de hierdoor ontstane behoefte om deze informatie te kunnen hanteren. Iets vergelijkbaars is voor te stellen bij wiskundige modellen: deze zullen meer geaccepteerd worden binnen muziekgerelateerd onderzoek als de voordelen hiervan duidelijker worden voor buitenstaanders. Ten slotte, steeds vaker verschijnen er gezamenlijke publicaties van wiskundigen en musicologen (De Jong & Noll 2008; Dominguez & al. 2007; Addessi & al. 2008), hetgeen de aanvaarding van dit nieuwe vakgebied zeker ten goede komt.

5 Toepassingen

Op het gebied van computationeel modelleren, was er in de jaren zeventig veel kritiek op de modellen in de muziektheorie. Ze zouden niet geïmplementeerd kunnen worden omdat ze niet precies genoeg waren (Patrick 1974; Alphonce 1980; Vercoe 1971). Er was dus vraag naar beter implementeerbare modellen, en wiskunde was hier duidelijk welkom.

Laten we naar de waarde van wiskunde binnen de muziek kijken aan de hand van een aantal (computationele) toepassingen. Aline Honingh heeft een model ontwikkeld voor de geometrische interpretatie van toonrelaties en ontdekte dat toonstructuren zoals toonladders en akkoorden bijna altijd een convexe en compacte vorm hebben in het Euler-rooster, zie Figuur 3 (Honingh & Bod 2005). Het Euler-rooster is een tweedimensionaal rooster van tonen. Dit rooster is bekend onder verschillende namen, waaronder Euler-rooster, Oettingen-rooster, *Tonnetz* en harmonisch netwerk. Dit rooster en varianten hiervan zijn reeds eerder gebruikt voor uiteenlopende doeleinden, onder welke 'key-finding' (Longuet-Higgins & Steedman 1987/1971), transformationele theorie (Lewin 1987) en microtonale toonsystemen (Balzano 1980). Het Euler-rooster is een geometrische voorstelling waarbij geprobeerd is de afstand tussen twee noten omgekeerd evenredig te laten zijn met de consonantie van deze samenklank. Dus hoe dichter twee tonen op het rooster zich bij elkaar bevinden, hoe consonanter de samenklank is. Het Euler-rooster kan voorgesteld worden als rooster van frequentieverhoudingen, nootnamen of pitch-classes. Het Euler-rooster van frequentieverhoudingen is oneindig in beide richtingen.[5] De roosters van nootnamen en pitch-classes hebben door enharmonische equivalenties bepaalde randvoorwaarden waardoor de roosters in een of twee richtingen opgerold kunnen worden (Honingh & Bod 2005). Doordat de verschillende Euler-roosters geen isomorfe (een-op-een) afbeeldingen van elkaar vormen, kan een set noten van een bepaald Euler-rooster op verschillende manieren afgebeeld worden op een ander Euler-rooster. Het afbeelden van één Euler-rooster op een ander Euler-rooster karakteriseert verschillende onderzoeksgebieden in de muziek. Zo verwijst het *pitch-spelling* probleem naar de notatie van enharmonisch equivalente noten in muziek: wanneer wordt pitch-class '1' geschreven (gespeld) als een C♯ en wanneer als een D♭? Dit is equivalent aan het probleem hoe een set pitch-classes van het Euler-rooster van pitch-

5 In dit geval zijn frequentieverhoudingen gebruikt die op te bouwen zijn uit machten van 2, 3 en 5. We spreken bij dit systeem van frequentieverhoudingen over 5-limiet reine stemming.

classes wordt afgebeeld op het Euler-rooster van nootnamen. Dit probleem is bijvoorbeeld van belang bij muzieknotatiesoftware die een gespeelde melodie dient te noteren. Verder representeert de afbeelding van het Euler-rooster van nootnamen naar het Euler-rooster van frequentieverhoudingen een intonatieprobleem: wanneer wordt een D (ten opzichte van een C) geïntoneerd als 9/8 en wanneer als 10/9?

Het resultaat dat toonstructuren meestal convexe en compacte vormen beschrijven op het Euler-rooster is gebruikt om deze problemen aan te pakken. Bovenstaande genoemde onderzoeksproblemen blijken grotendeels opgelost te kunnen worden door pitch-class-sets van het ene Euler-rooster zoveel mogelijk convex en compact af te beelden op het andere Euler-rooster (Honingh 2008; Honingh 2009). Het principe van convexe en compacte afbeeldingen is verder gebruikt bij het automatisch vinden van modulaties in muziek (Honingh 2007).

Anja Volk heeft het model 'Inner Metric Analysis' (interne metrische analyse) gebruikt om verschillende aspecten te beschrijven van ritmische en metrische structuren in muziek (Volk 2008a, 2008b). Het model heeft een algebraïsch-topologische basis. Voor elke noot wordt een metrisch gewicht berekend dat het (metrische) belang van deze noot in zijn context aangeeft, gebaseerd op de detectie van noten met gelijke tussenpozen (gemeten vanaf de nootaanzet) in het stuk muziek. Deze aanpak stemt overeen met eerdere muziektheoretische benaderingen van metrische structuren in muziek (Yeston 1976; Lerdahl & Jackendoff 1983; Krebs 1999), waarbij pulsen (welke uit noten met gelijke tussenpozen bestaan) een belangrijke rol spelen om het metrische accent van een noot te bepalen. Het berekenen van het metrisch gewicht voor alle noten in een stuk muziek resulteert in een metrisch gewichtsprofiel van het hele stuk (zie het voorbeeld in Figuur 4). Dit profiel kan metrische lagen in de muziek blootleggen die in veel gevallen corresponderen met de metrische lagen die de maatsoort aangeeft (zie Figuur 4 voor een voorbeeld in 2/4). Het model bepaalt dus de interne metrische structuur die ontstaat door de noten, in tegenstelling tot de externe metrische structuur die gegeven wordt door de maatsoort van een stuk muziek. Het model kan onderscheid maken tussen enerzijds muziekstukken die een regelmatig ritmisch patroon volgen, zoals ragtime-muziek (zie Figuur 4) waarbij het gemakkelijk is om de maat mee te kunnen tikken, en anderzijds muziekstukken die een onregelmatige ritmische structuur hebben, zoals Stravinsky's *Sacre du printemps* (zie Figuur 5). Zoals Figuur 5 laat zien, wordt er geen enkele metrische laag onthuld door de noten in de muziek, wat demonstreert dat er geen consistente interpretatie van het stuk is wat betreft maatsoort (Stravinsky verandert de maatsoort van het stuk veelvuldig, soms zelfs per maat). De metrische lagen van de ragtime-muziek in Figuur 4 zijn echter in overeenstemming met de typische metrische lagen van een 2/4-maat. Dit soort overeenstemming tussen de interne en externe metrische structuur wordt *metric coherence* genoemd, en lijkt overeen te komen met het concept van *metric consonance* zoals beschreven door Krebs (1999). Composities van Brahms, Schumann of Haydn worden vaak gekarakteriseerd door metrische lagen van de interne metrische structuur die niet overeenstemmen met de genoteerde maatsoort, wat aangeeft dat de componist met opzet een discrepantie heeft gecreëerd tussen de noten en het abstracte rooster van maatstrepen. In Volk 2008a wordt een analyse door David Lewin van Anton Weberns *Variationen,* op. 27, vergeleken met de gewichtsprofielen volgens de Inner Metric Analysis. De vergelijking laat zien dat het model een formalisatie van Lewins gedachten oplevert: het stuk kan makkelijker volgens een 3/8 worden geïnterpreteerd hoewel het in 2/4 genoteerd is. Vergelijkingen van de metrische lagen met resultaten van luisterexperimenten hebben de cognitieve relevantie van het model gedemonstreerd (Volk 2008b). Het model is verder gebruikt om dansmuziekpatronen (Chew & al. 2005) en volksliedjes (Volk & al. 2007) te classificeren aan de hand van ritmische gelijksoortigheid, en om stabiele segmenten binnen muziekstukken te vinden (Volk & Chew 2008).

Andere toepassingen binnen de muziek die hebben geprofiteerd van een mathematische aanpak zijn bijvoorbeeld *key finding*, segmentatie en *similarity*. Bij *key finding* gaat het om het automatisch vinden van de toonsoort van een muziekstuk of van een deel daarvan. Dit probleem is onder andere succesvol aangepakt met een geometrisch model (Chew 2000; Longuet-Higgins & Steedman 1987) en met Bayesiaanse principes (Temperley 2007). Bij segmentatie is het doel

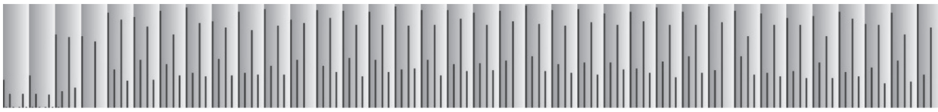
	25/18	25/24	25/16	75/64	225/128		
40/27	10/9	5/3	5/4	15/8	45/32	135/128	
32/27	16/9	4/3	1	3/2	9/8	27/16	81/64
256/135	64/45	16/15	8/5	6/5	9/5	27/20	81/80
	256/225	128/75	32/25	48/25	36/25	27/25	

	F#	C#	G#	D#	A#		
G	D	A	E	B	F#	C#	
Eb	Bb	F	C	G	D	A	E
Cb	Gb	Db	Ab	Eb	Bb	F	C
	Ebb	Bbb	Fb	Cb	Gb	Db	

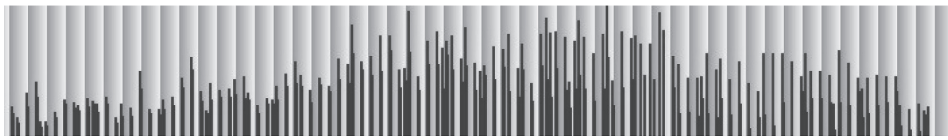
	6	1	8	3	10		
7	2	9	4	11	6	1	
3	10	5	0	7	2	9	4
11	6	1	8	3	10	5	0
	2	9	4	11	6	1	

Figuur 3
Euler-rooster van (a) frequentieverhoudingen, (b) nootnamen en (c) pitch-classes. In afbeelding (a) is de diatonische majeurtoonladder ingetekend die een convexe figuur beschrijft in deze ruimte.

een muziekstuk automatisch te segmenteren in perceptief logische groepen. Net zoals tekst gesegmenteerd kan worden in zinnen en bijzinnen, zo kan muziek gesegmenteerd worden in frases en subfrases. Verschillende soorten technieken worden hiervoor gebruikt, waaronder statistische methoden toegepast op experimentele data (Bod 2002; Spiro 2007). *Similarity*, ofwel gelijkenis of gelijksoortigheid, ten slotte, is een ruim begrip dat betrekking kan hebben op verschillende muzikale entiteiten, van ritmes en melodieën tot pitch-class-sets. Gelijksoortigheid van melodieën heeft belangrijke implicaties voor bovengenoemde segmentatie (Cambouropoulos 2006), maar ook voor het gebied van Music Information Retrieval, om het automatisch zoeken naar melodieën binnen een groot corpus mogelijk te maken (Volk & al. 2008; Garbers & al. 2007). Verder zijn er verschillende mathematische



Figuur 4
Metrisch gewichtdiagram van Scott Joplins *Nonpareil Rag* met een regelmatig patroon: hoe hoger de lijn, hoe groter het gewicht van de corresponderende noot. De van donker naar licht overlopende grijze achtergrond correspondeert met de maten zoals aangegeven in de partituur.



Figuur 5
Metrisch gewichtdiagram van Igor Stravinsky's 'Danse Sacrale' (uit de *Sacre du printemps*), met een onregelmatig ritmisch patroon.

formules ontwikkeld om de mate van gelijkenis van pitch-class-sets aan te duiden (Isaacson 1990; Morris 1980; Rahn 1980; Rogers 1999), die op hun beurt weer gebruikt zijn voor verschillende doeleinden, onder andere voor classificatie (Quinn 2001).

Alle bovengenoemde toepassingen zijn voorbeelden van gemodelleerde cognitieve processen. Het zijn als het ware 'taken' die mensen goed kunnen, maar waarvan het heel lastig is om precies te noteren wat er gebeurt. Neem als voorbeeld het segmenteren van muziek in frasen. De meeste mensen, zeker degenen die muzikaal geschoold zijn, doen dit automatisch goed, op hun gevoel. Het is echter heel lastig om dit proces in een set regels of mathematische code op te schrijven. Maar als we dit toch proberen te doen, zal een succesvol model niet alleen heel waardevol zijn voor het automatisch segmenteren van muziek, maar ook inzicht kunnen geven in de cognitieve aspecten die een rol spelen bij het menselijke muzieksegmentatieproces. Verder kunnen de inzichten in de cognitieve processen weer dienen als een nieuw beginpunt voor een (mathematisch) model.

6 Afsluitende opmerkingen

Mathematische muziektheorie is een onderzoeksgebied waarin zeer diverse wiskundige technieken gebruikt worden, onder andere statistische methoden, groepentheorie, geometrische modellen, getaltheorie en topologie. Het vakgebied is niet homogeen wat betreft de muzikale toepassingen: er zijn enerzijds abstracte modellen die theoretiseren over de basiselementen van de muziek, en anderzijds modellen die direct geïnspireerd zijn door concrete stukken muziek.

Ondanks het gegeven dat er soms kleine communicatieproblemen zijn tussen enerzijds de meer wiskundig georiënteerde en anderzijds de meer musicologisch georiënteerde onderzoekers, lijkt het vakgebied mathematische muziektheorie steeds meer erkenning en waardering te krijgen. Terwijl traditionele muziektheorie zich meestal richt op het bestuderen van een bepaalde muziekstijl of een specifieke vraag, heeft mathematische muziektheorie vaak als doel meer algemeen geldende theorieën op te stellen hetgeen tot een beter begrip van muziek en muziek maken en beluisteren kan leiden. De kracht van wiskunde in muziekgerelateerd onderzoek is in de eerste plaats dat op deze manier zaken heel precies geformuleerd kunnen worden, in de tweede plaats dat een wiskundig geformuleerde theorie implementeerbaar is in computationele modellen die onder andere automatische analyse van muziek mogelijk maken, en in de derde plaats dat hierdoor mogelijk meer inzicht verkregen kan worden in cognitieve processen die met muziek samenhangen.

De voorbeelden van gecombineerd wiskundig en muziekgerelateerd onderzoek die genoemd worden in dit artikel zijn nog maar het begin van wat allemaal mogelijk is in deze onderzoeksrichting. Dit eeuwenoude vakgebied lijkt nog een grote toekomst te hebben.

(Aline Honingh promoveerde in 2006 aan de Universiteit van Amsterdam. Sindsdien was ze werkzaam bij de Music Informatics Research Group aan de City University London en bij het Institute for Logic, Language and Computation aan de Universiteit van Amsterdam.)

(Musicoloog en wiskundige Anja Volk schreef haar proefschrift over mathematische muziektheorie aan de Technische Universiteit van Berlijn. Tegenwoordig is ze werkzaam in een NWO-CATCH project aan de Universiteit Utrecht.)

Literatuurverwijzingen

Adams, Coutney S. (1996) 'Erik Satie and Golden Section Analysis', in: *Music and Letters* 77/2, 242-252.

Addessi, Anna Rita, Mirko Degli Esposti, and Francois Pachet (2008) 'Musical Style Again: A Mathematical Analysis of Musical Intertext', in: *Proceedings of the Fourth Conference on Interdisciplinary Musicology (CIM)*, Thessaloniki, Greece.

Agmon, Eytan (1989) 'A Mathematical Model of the Diatonic System', in: *Journal of Music Theory* 33/1, 1-25.

Alphonce, Bo H. (1980) 'Music Analysis by Computer: A Field of Theory Formation', in: *Computer Music Journal* 4/2, 26-35.

Balzano, Gerald J. (1980) 'A Group Theoretical Description of 12-Fold and Microtonal Pitch Systems', in: *Computer Music Journal* 4/4, 66-84.

Barron, Michael (2008) 'Raising the Roof', in: *Science* 453, 859-860.

Benson, David (2006) *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge: Cambridge University Press.

Bod, Rens (2002) 'Memory-Based Models of Melodic Analysis: Challenging the Gestalt Principles', in: *Journal of New Music Research* 31/1, 27-37.

Buteau, Chantal, and Guerino Mazzola (2008) 'Motivic Analysis According to Rudolph Reti: Formalization by a Topological Model', in: *Journal of Mathematics and Music* 2/3, 117-134.

Callender, Clifton, Ian Quinn, and Dmitri Tymoczko (2008) 'Generalized Voice-Leading Spaces', in: *Science* 320, 346-348.

Cambouropoulos, Emilios (2006) 'Musical Parallelism and Melodic Segmentation: A Computational Approach', in: *Music Perception* 23/3, 249-269.

Carey, Norman, and David Clampitt (1989) 'Aspects of Well-Formed Scales', in: *Music Theory Spectrum* 11/2, 187-206.

Chew, Elaine (2000) 'Towards a Mathematical Model of Tonality', PhD thesis, Operations Research Center, Massachusetts Institute of Technology.

_______, Anja Volk, and Chia-Ying Lee (2005) 'Dance Music Classification Using Inner Metric Analysis: A Computational Approach and Case Study Using 101 Latin American Dances and National Anthems',

in: *Proceedings of the Ninth INFORMS Computing Society Conference, Volume 29*, 355-370.

Clough, John, and Jack Douthett (1991) 'Maximally Even Sets', in: *Journal of Music Theory* 35, 93-173.

_______, and Gerald Myerson (1985) 'Variety and Multiplicity in Diatonic Systems', in: *Journal of Music Theory* 29/2, 249-270.

Cohn, Richard (1992) 'Transpositional Combination of Beat-Class Sets in Steve Reich's Phaseshifting Music', in: *Perspectives of New Music* 30/2, 146-177.

Craats, Jan van de (1989) *De fis van Euler: Een nieuwe visie op de muziek van Schubert, Beethoven, Mozart en Bach*, Bloemendaal: Aramith.

Dominguez, Manuel, David Clampitt, and Thomas Noll (2007) 'Well-Formed Scales, Maximally Even Sets, and Christoffel Words', in: *Proceedings of the Mathematics and Computation in Music conference (MCM)*, Berlin, Germany.

Fokker, Adriaan D. (1955) 'Equal Temperament and the Thirty-One-Keyed Organ', in: *Scientific Monthly* 81, 161-166.

Forte, Alan (1973) *The Structure of Atonal Music*, New Haven: Yale University Press.

Garbers, Joerg, Peter van Kranenburg, Anja Volk, Frans Wiering, Remco C. Veltkamp, and Louis P. Grijp (2007) 'Using Pitch Stability among a Group of Aligned Query Melodies to Retrieve Unidentified Variant Melodies', in: *Proceedings of the Eighth International Conference on Music Information Retrieval (ISMIR),* Vienna, 451-456.

Honingh, Aline K. (2006) 'The Origin and Well-Formedness of Tonal Pitch Structures', PhD thesis, University of Amsterdam.

_______ (2007) 'Automatic Modulation Finding Using Convex Sets of Notes', in: *Proceedings of Mathematics and Computation in Music (MCM2007)*, Berlin: Springer, 18-20.

_______ (2008) *A Geometrical Approach to Find the Preferred Intonation of Chords*, Technical Report TR/2008/DOC/02, Department of Computing, City University London.

_______ (2009) 'Compactness in the Euler Lattice: A Parsimonious Pitch Spelling Algorithm', in: *Musicae Scientiae* 13/1, 117-138.

_______ and Rens Bod (2005) 'Convexity and the Well-Formedness of Musical Objects', in: *Journal of New Music Research*, 34/3, 293-303.

Isaacson, Eric J. (1990) 'Similarity of Interval-Class Content between Pitch-Class Sets: The IcVSIM Relation', in: *Journal of Music Theory* 34, 1-28.

Jeans, James (1968) *Science and Music*, New York: Dover.

Jong, Karst de, and Thomas Noll (2008) 'Contiguous Fundamental Bass Progressions', in: *Dutch Journal of Music Theory* 13/1, 84-97.

Kramer, Jonathan (1973) 'The Fibonacci Series in Twentieth-Century Music', in: *Journal of Music Theory* 17, 111-148.

Krebs, Harald (1999) *Fantasy Pieces: Metrical Dissonance in the Music of Robert Schumann*, Oxford: Oxford University Press.

Lerdahl, Fred, and Ray Jackendoff (1983) *A Generative Theory of Tonal Music*, Cambridge, MA: MIT Press.

Lewin, David (1981) 'On Harmony and Meter in Brahms' Op. 76, No. 8', in: *19th-Century Music* 4/3, 261-326.

_______ (1987) *Generalized Musical Intervals and Transformations*, New Haven: Yale University Press.

Longuet-Higgins, Hugh Christopher, and Mark Steedman (1987/1971) 'On Interpreting Bach', in: Longuet-Higgins, Hugh Christopher (ed.), *Mental Processes: Studies in Cognitive Science*, Cambridge, MA: MIT Press, 82-104.

Morris, Robert (1980) 'A Similarity Index for Pitch-Class Sets', in: *Perspectives of New Music* 18, 445-460.

Noll, Thomas, and Anja Volk (2005) 'Transformationelle Logik der Dissonanzen und Konsonanzen', in: Enders, B. (ed.), *Mathematische Musik musikalische Mathematik*, Saarbruecken: PFAU Verlag.

Norden, Hugo (1964) 'Proportions in Music', in: *Fibonacci Quarterly* 2, 219-222.

Partch, Harry (1974/1949) *Genesis of a Music*, second edition, New York: Da Capo Press.

Patrick, P. Howard (1974) 'A Computer Study of a Suspension-Formation in the Masses of Josquin Desprez', in: *Computers and the Humanities* 8, 321-331.

Plomp, Reinier, and Willem J. Levelt (1965) 'Tonal Consonance and Critical Bandwith', in: *Journal of the Acoustical Society of America* 38, 548-560.

Quinn, Ian (2001) ‘Listening to Similarity Relations’, in: *Perspectives of New Music* 39, 108-158.

Rahn, John (1980) ‘Relating Sets’, in: *Perspectives of New Music* 18, 483-498.

Roeder, John (1995) ‘A Calculus of Accent’, in: *Journal of Music Theory* 39/1, 1-46.

Rogers, David W. (1999) ‘A Geometric Approach to Pcset Similarity’, in: *Perspectives of New Music* 37/1, 77-90.

Rothstein, Edward (2003) ‘A Seeker of Music’s Poetry in the Mathematical Realm’, in: *The New York Times*, June 28, 9.

Samplaski, Art (2004) ‘The Relative Perceptual Salience of Tn and TnI’, in: *Music Perception* 21/4, 545-559.

Schenker, Heinrich (1906) *Harmonielehre*, Wien: Universal Edition.

Schuijer, Michiel (2008) *Atonal Music: Pitch-Class Set Theory and Its Contexts*, Rochester, NY: University of Rochester Press.

Smoorenburg, Guido F. (1970) ‘Pitch Perception of Two-Frequency Stimuli’, in: *Journal of the Acoustical Society of America* 48, 924-942.

Spiro, Neta (2007) ‘What Contributes to the Perception of Musical Phrases in Western Classical Music?’, PhD thesis, University of Amsterdam.

Stammers, Diana (1994) ‘Set Theory in the Perception of Atonal Pitch Relations’, PhD thesis, Cambridge University.

Szeto, Wai Man and Man Hon Wong (2006) ‘A Graph-Theoretical Approach for Pattern Matching in Post-Tonal Music Analysis’, in: *Journal of New Music Research* 35/4, 307-321.

Temperley, David (2007) *Music and Probability*, Cambridge, MA: MIT Press.

Tramo, Mark J., Peter A. Cariani, Bertrand Delgutte, and Louis D. Braida (2001) ‘Neurobiological Foundations for the Theory of Harmony in Western Tonal Music’, in: *Annals of the New York Academy of Science* 930, 92-116.

Vercoe, Barry (1971) ‘Review of “The Computer and Music” by Harry B. Lincoln’, in: *Perspectives of New Music* 9, 323-330.

Volk, Anja (2008a) ‘Persistence and Change: Local and Global Components of Metre Induction Using Inner Metric Analysis’, in: *Journal of Mathematics and Music* 2/2, 99-115.

_______ (2008b) ‘The Study of Syncopation Using Inner Metric Analysis: Linking Theoretical and Experimental Analysis of Metre in Music’, in: *Journal of New Music Research* 37/4, 259-273.

_______, and Elaine Chew (2008) ‘Reconsidering the Affinity Between Metric and Tonal Structures in Brahms’ Capriccio Op. 76, No. 8’, in: *Computing in Musicology* 15, 138-171.

_______, Joerg Garbers, Peter van Kranenburg, Frans Wiering, Remco C. Veltkamp, and Louis P. Grijp (2007) ‘Applying Rhythmic Similarity Based on Inner Metric Analysis to Folksong Research’, in: *Proceedings of the Eighth International Conference on Music Information Retrieval (ISMIR)*, Vienna, 293-296.

_______, Peter van Kranenburg, Joerg Garbers, Frans Wiering, Remco C.Veltkamp, and Louis P. Grijp (2008) ‘A Manual Annotation Method for Melodic Similarity and the Study of Melody Feature Sets’, in: *Proceedings of the Ninth International Conference on Music Information Retrieval (ISMIR)*, Philadelphia, PA, 101-106.

Wittlich, Gary (1974) ‘Intervallic Set Structure in Schoenberg’s Op. 11, No. 1’, in: *Perspectives of New Music* 13, 41-55.

Yasser, Yoseph (1975) *A Theory of Evolving Tonality*, New York: Da Capo Press.

Yeston, Maury (1976) *The Stratification of Musical Rhythm*, New Haven: Yale University Press.