Downloaded from UvA-DARE, the institutional repository of the University of Amsterdam (UvA)
http://hdl.handle.net/11245/2.21447

File ID uvapub:21447
Filename Kaas_1_.pdf
Version unknown

SOURCE (OR PART OF THE FOLLOWING SOURCE):
Type inaugural lecture
Title Actuariële Statistiek - Verleden en Toekomst
Author(s) R. Kaas
Faculty FEB: Amsterdam School of Economics Research Institute (ASE-RI)
Year 2002

FULL BIBLIOGRAPHIC DETAILS:
http://hdl.handle.net/11245/1.207183

Copyright

It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content licence (like Creative Commons).

UvA-DARE is a service provided by the library of the University of Amsterdam (http://dare.uva.nl)
(pagedate: 2014-11-16)

Actuariële Statistiek – Verleden en Toekomst

Vossiuspers UvA
Deze uitgave is totstandgekomen onder auspiciën van de Universiteit van Amsterdam.

Omslag: Colorscan, Voorhout
Opmaak: JAPES, Amsterdam
Foto omslag: Carmen Freudenthal, Amsterdam

ISBN 90 5629 241 2
©Vossiuspers UvA, Amsterdam, 2002

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voorzover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16B Auteurswet 1912 j° het Besluit van 20 juni 1974, St.b. 351, zoals gewijzigd bij het Besluit van 23 augustus 1985, St.b. 471 en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 882, 1180 AW Amstelveen). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) dient men zich tot de uitgever te wenden.

Actuariële Statistiek – Verleden en Toekomst

Rede

Uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van
hoogleraar Actuariële Statistiek
aan de Universiteit van Amsterdam
op vrijdag 11 januari 2002

door

Rob Kaas

Vossiuspers UvA

Geachte notabelen van de Universiteit van Amsterdam,
gewaardeerde collega's hoogleraren, lector,
beste studenten en oud-studenten, familie, vrienden,
kortom: iedereen die door uw vererende aanwezigheid deze plechtigheid luister bijzet,

1. Inleiding

Zoals in de titel van mijn oratie vermeld, handelt deze over verleden en toekomst van mijn vakgebied, de actuariële statistiek. De titel van mijn oratie zet overigens een traditie voort; ook de titels van de oraties van collega's Goovaerts, Wolthuis en Kok waren van de vorm: 'Vakgebied – begrip en/of tegengestelde'.

Diverse mensen hebben de hoop uitgesproken uit deze oratie te vernemen wat mijn vakgebied 'actuariële statistiek' precies inhoudt. Wat statistiek is, weet iedereen wel, maar proefondervindelijk is onlangs weer eens aangetoond dat slechts weinig mensen benul hebben van wat actuariaat, oftewel verzekeringswiskunde, nu eigenlijk inhoudt. Een informeel onderzoekje uitgevoerd door een van onze studenten leerde dat van meer dan honderd mensen die vorig jaar werden benaderd in de Kalverstraat er slechts twee het woord actuariaat zelfs maar kenden (Langerak, 2001). Het belang van statistiek, op grotere schaal dan in genoemd onderzoekje, in het verzekeringsbedrijf is evident: iemand moet toch beoordelen, op grond van kennis uit het verleden, wat de toekomstige premie moet zijn voor diverse verzekeringsvormen en toetsen of het gebruikte model niet systematisch afwijkt? Vragen zoals de volgende zijn van levensbelang voor een verzekeraar: hoe lang trekken mensen gemiddeld nog pensioen na hun vijfenzestigste, hoeveel brokken maken dertigjarige chauffeurs van het platteland met een lease-auto van 1000 kilo, maken rokers meer brandschade, wat moet de nominale premie zijn voor ziektekostenverzekeringen opdat de verzekeraar toch enige winst maakt, wat is de kans dat een verzekeraar failliet gaat als deze de huidige premies blijft hanteren? Om dit

soort vragen te beantwoorden moeten goed passende modellen worden opgesteld, en vervolgens de parameters ervan zo goed mogelijk bepaald worden, aan de hand van de vaak overvloedige, en soms minieme, data waarover verzekeraars beschikken. Probleem is ook als zich belangrijke verschillen voordoen tussen voorspelde schadebedragen, dus premies, en de realisaties daarvan, dat de betere risico's hun heil elders zullen zoeken, en de verzekeraar laten met de kneuzen en de brokkenmakers.

Allereerst geef ik een aantal voorbeelden van het gebruik van statistiek in de verzekeringswereld. Daarna behandel ik, in vogelvlucht, een aantal modellen die we in de actuariële statistiek zoal gebruiken. Na enige bespiegelingen over de toekomst van het vakgebied volgt nog de afsluiting.

2. Toepassing van statistiek in de verzekeringswereld

Statistiek wordt in het verzekeringsbedrijf dagelijks bedreven, voor premiestelling, bepaling van reserves, beoordeling van nieuwe producten enzovoorts. Maar er is ook een aantal al dan niet periodiek terugkerende grote projecten aan te wijzen.

Als eerste voorbeeld van het gebruik van statistiek in de verzekeringswereld noem ik het samenstellen door het Actuarieel Genootschap, de wetenschappelijke en beroepsvereniging van de actuarissen, van de vijfjaarlijkse 'AG-Tafels'. De vorige dateert van 1997, en beslaat de periode 1990-1995. In deze uitgave worden elke vijf jaar aan de hand van door het Centraal Bureau voor de Statistiek verschafte cijfers over de sterfte in Nederland tafels opgesteld met schattingen voor de kans om niet te overlijden in een jaar, plus een aantal daarvan afgeleide grootheden, voor elke leeftijd en naar geslacht. Dieper gaat de opsplitsing niet: er wordt geen rekening gehouden met gegevens over het feit of iemand rookt, marathons loopt, en dergelijke. De sterftetafelcommissie bestaat uit een eerbiedwaardig gezelschap actuarissen, die trachten uit de veelheid van mogelijke krommen om deze overlevingskansen te benaderen, diegene te kiezen die enerzijds het beste past bij de data, zijnde de waargenomen frequenties van overleven, en anderzijds er toch bevredigend glad uitziet.

Als tweede belangrijke toepassing van actuariële statistiek noem ik de risicostatistieken opgesteld door het Centrum voor Verzekeringsstatistiek (CVS) van het Verbond van Verzekeraars en door Vektis, dat is het cijferinstituut van de zorgverze-

keraars in Nederland. De moeilijkheid hierbij is dat de benodigde cijfertjes uit de administratie van verzekeraars moeten komen, die elk hun eigen regeltjes en gewoonten hebben. Dit maakt het samenstellen van deze risicostatistieken een kostbare aangelegenheid, en het CVS is dus terughoudend met het ter beschikking stellen ervan aan derden, zelfs alleen maar voor studiedoeleinden.

Verder zijn wij in Nederland nog steeds gepast trots op het grootscheepse actuarieel-statistische onderzoek dat rond 1980 verricht is naar de premies van autoverzekeringen. Men zie het boekje van G.W. de Wit *et al*. (1982), uitgegeven door de ASTIN-groep, de club van schadeactuarissen van het Actuarieel Genootschap. De markt gaf er alle aanleiding toe, en was instorting nabij. Sindsdien is het merendeel van de Nederlandse autoverzekeraars van een 'No-Claim discount systeem' overgestapt op een veel verfijnder bonus-malussysteem. Om de lokale verzekeraars die de krenten uit de pap pikten de wind uit de zeilen te nemen, werd er een regiokorting ingevoerd. In het kader van dit NPSA-onderzoek (Nieuwe PremieStructuur Autoverzekeringen) werden zo'n 800.000 polissen van de vijf grootste maatschappijen op het gebied van autoverzekeringen onderzocht. Hierop vielen circa 70.000 schades, en er werden zo'n vijftig risicokenmerken bijgehouden. Het was de tijd van de grote mainframes en, waar dergelijk statistisch onderzoek nu met standaardprogrammatuur op de pc gedaan wordt, moesten de methoden in die tijd door de studiegroep zelf uitgezocht en geprogrammeerd worden. Het bleek later dat een aantal heuristische technieken, die men op grond van plausibele eigenschappen ervan gebruikt had, ook het stempel van goedkeuring van de mathematische statistiek konden verkrijgen, omdat zij neerkwamen op statistisch weldoortimmerde technieken, namelijk aannemelijkheidsmaximalisatie in veralgemeende lineaire modellen.

3. Modellen uit de actuariële statistiek en het schadeactuariaat

Hierna zal ik een kort overzicht geven van de belangrijkste modellen uit het schadeactuariaat. Dit zijn vaak modellen uit de toegepaste waarschijnlijkheidsrekening. Met toetsen en schatten houdt het schadeactuariaat zich minder intensief bezig. Vaak is het schattingsprobleem standaard en het toetsprobleem minder rele-

vant, omdat – in de grond – anderen dan volgelingen van Neyman en Pearson over toepassing van het model beslissen.

Waar het actuariaat in Nederland en Amsterdam zo'n halve eeuw geleden nauw verbonden was aan de wiskunde, zoals dat trouwens in vele landen nog steeds het geval is, is het sinds de inweving van de actuariële en econometrische opleidingen in de economische faculteit, die zo'n vijftien jaar terug plaatsvond, allengs meer economisch gericht aan het worden. Dit is niet zozeer toe te schrijven aan de invloed van onze omgeving, als wel aan een in de praktijk gebleken behoefte aan functionarissen die niet louter inzicht hebben in de toekomstige verzekeringsverplichtingen, maar zich ook een breder oordeel kunnen vormen over hoe het spaargeld, bestemd om deze verplichtingen te dekken, belegd is. Als eerste behandel ik dan ook een economisch model, en wel het model dat aan het hele instituut verzekeren ten grondslag ligt. Ik volg in dit gedeelte overigens het recent verschenen boek *Modern Actuarial Risk Theory* (verder aan te duiden als *Modern ART*), van Kaas, Goovaerts, Dhaene en Denuit (2001). Het zal in de plaats treden van het boek *Inleiding Risicotheorie*, dat al een tiental jaren in gebruik is aan de UvA, het Actuarieel Instituut en binnen diverse andere instellingen in Nederland.

1) Het verwachte nutsmodel en verzekeringen

Het hele instituut verzekeren is gebaseerd op een economisch kansmodel dat het beslissingsproces onder onzekerheid beoogt te beschrijven. De nutstheorie van Von Neumann-Morgenstern (1944) poneert een stelsel axioma's over hoe beslissers zich in onzekere situaties gedragen. Hieruit volgt dan dat beslissingen genomen worden op grond van het gemiddeld resulterend 'nut' $u(x)$ dat men hecht aan het bezit van kapitaal x. Hoewel deze verwachte nutshypothese niet steeds nauwkeurig de voorkeuren van beslissers voor bepaalde onzekere situaties weergeeft, getuige bijvoorbeeld de 'Allais paradox' (1953) waarbij experimenteel gebleken is dat de meeste beslissers zich niet braaf gedragen volgens die axioma's, geeft deze toch aan wat de economische functie is van ver*zeker*en. Een 'zinnige' beslisser vindt elke extra euro dienstig, maar in afnemende mate naarmate hij rijker is. De winst aan welzijn als het kapitaal van 0 naar 1 miljoen euro stijgt (van krantenjongen tot miljonair) is groter dan die van 1 naar 2 (weer een miljoen erbij), oftewel $u(1)-u(0) > u(2)-u(1)$. Dit alles houdt in dat hij een stijgende maar afplattende, dus concave, nutsfunctie heeft. Men kan dan makkelijk laten zien dat deze beslisser de toestand

'zeker' verkiest boven 'onzeker', in de zin dat hij een risico liever zal afkopen als dat kan met het te verwachten verlies. Als onze beslisser vanuit kapitaal 2 een zeker bedrag 1 verbeurt, is het resulterende nut gelijk aan $u(1)$. Als hij wordt blootgesteld aan een onzeker gokje waarin hij in de helft van de gevallen niets, in de andere helft zijn gehele kapitaal 2 verliest, resulteert een blijkens de voorgaande ongelijkheid gemiddeld lager nut $\{u(0)+u(2)\}/2$. Deze beslisser prefereert dus de toestand 'zeker' boven 'onzeker', in de zin dat een hoger nut voor hem resulteert als hij het risico weet af te kopen met de verwachtingswaarde van het verlies. Als de premie iets hoger uitvalt, zodat de verzekeraar naar verwachting ook winst maakt, kunnen beide partijen nutsvoordeel uit deze transactie trekken. Met de ongelijkheid van Jensen kan men bewijzen dat beslissers met concave nutsfuncties avers zijn van élk risico, en altijd de zekerheid van verzekering tegen netto premie, dus het gemiddelde verlies, zullen verkiezen.

Met dit eenvoudige model kan overigens direct een krachtige stelling bewezen worden, namelijk dat als de verzekeraar genoegen neemt met een premie die alleen maar afhangt van het gemiddelde verlies, de meest effectief ver*zeker*ende polissen die de verzekerde kan kiezen een zogenaamd 'eigen risico' kennen. Deze verzekeringsvorm is bijvoorbeeld bekend uit de ziektekostenverzekeringen, waar de verzekeraar het schadebedrag vergoedt voorzover dit een bepaald bedrag, het eigen risico, overstijgt. In de situatie dat een verzekeraar zich op deze wijze herverzekert bij een herverzekeraar, spreekt men van *stop-loss*. De herkomst van die term is duidelijk: het verlies van de verzekeraar stopt bij het eigen risico, immers de herverzekeraar past de rest bij.

Om het nutsmodel te kunnen toepassen moeten we de kansverdeling kennen van het toekomstige kapitaal van een verzekeraar. Uitgaven zijn de te verrichten uitkeringen op de polissen, de inkomsten zijn de premies en de opbrengst van het huidige kapitaal. De opbrengst van het kapitaal speelt bij schadeverzekeringen een wat minder prominente rol, omdat er in de regel weinig tijd verloopt tussen premiebetaling en schade-uitkering, veel minder dan bij levens- en pensioenverzekeringen waarbij die tijd in de tientallen jaren kan lopen, en de spaarpotten dus gigantisch kunnen oplopen. Aan de andere kant is bij levensverzekeringen tevoren bekend wat er moet worden uitgekeerd bij overlijden, wat de situatie weer makkelijker maakt. We bekijken in het boek twee kansmodellen voor de totale uitkering, het individuele model en het collectieve model.

2) Het individuele model

In het individuele model wordt geëist dat de diverse polissen elkaars uitkomst niet beïnvloeden, dus stochastisch onafhankelijk zijn. De kansverdeling van de totale schade-uitkering kan dan bepaald worden door alle polissen apart af te werken, met convolutie. De hiervoor benodigde rekentijd kan exponentieel oplopen, maar met beperkingen aan de mogelijke waarden van de verzekerde bedragen is deze bij kleine portefeuilles nog tot aanvaardbaar niveau terug te brengen. Wel gaat de exactheid van de methode uiteraard verloren als daartoe afrondingen nodig blijken te zijn.

3) Het collectieve model

Bij het collectieve model wordt de portefeuille gezien als een collectief dat op gezette tijden in een bepaald tijdvak een claim voortbrengt. Het aantal claims is dus tevoren onbekend. Men krijgt een *compound Poisson verdeling* door aan te nemen dat het aantal claims een Poisson verdeling heeft, en dat de claims alle dezelfde kanswet volgen. Om een individueel model collectief te benaderen is het gebruikelijk de Poisson parameter en de kanswet zo te nemen dat de verwachte frequenties van alle schadebedragen in beide modellen gelijk zijn, dus ook het verwachte totaal ervan. Overgang op het ingewikkelder collectieve model is de moeite waard omdat men hiermee veel sneller kan rekenen dan met het individuele model.

Voor compound Poisson verdelingen bestaat een algoritme om de kansverdeling van de totaalschade redelijk snel te berekenen. Dit is gebaseerd op de stelling dat als men voor de totaalschade een frequentietabel maakt van de verschillende schadebedragen, de aantallen van deze bedragen onafhankelijke Poisson stochasten zijn, met een parameter evenredig met de kans op een schade gelijk aan dat bedrag. Als de schadebedragen geheel zijn, kan men eenvoudig door convolutie de kansen voor de totaalschade bepalen, en doordat deze convolutie voor grote schadebedragen schaars gevulde kansvectoren behelst (*sparse vectors*), kan men op deze wijze de kansen op totaalschades vanaf 0 tot en met n snel berekenen, in een tijd evenredig met $n^2 \log n$. In het algemeen vinden actuarissen de analyse van algoritmen overigens wat minder interessant, misschien omdat de termijn waarop het resultaat in de praktijk geleverd moet worden vrijwel onveranderlijk 'gisteren' is, en dan wordt een *quick-and-dirty*-methode, zoals simulatie, opeens heel aantrekkelijk.

Het kan echter nog veel vlugger. Dit danken wij aan Harry Panjer. Hij woont al bijna zijn hele leven in Canada, maar heeft zijn *roots* in Friesland. Hij was hoofd van het Canadian Institute of Actuaries, en is nu *president-elect* van de Society of Actuaries, de bond van Amerikaanse actuarissen. Hiermee wordt hij de tweede achtereenvolgende wetenschappelijke voorzitter daarvan, en dat is een idee dat navolging verdient. Panjer (1981) introduceerde een eenvoudig recursief algoritme binnen het actuariaat dat niet alleen sneller werkt dan het bovenstaande, maar ook nog eens kan worden toegepast op andere aantalverdelingen, namelijk behalve voor de Poisson ook nog voor de binomiale en de negatief binomiale verdelingen. In dezelfde situatie van daarnet is het aantal benodigde bewerkingen voor Panjers recursie van de orde n^2, dus zonder de factor log$n$. En als de maximale schadehoogte beperkt is, zeg hoogstens m, kost de recursie slechts een tijd evenredig met nxm. Een getallenvoorbeeldje: als we de gehele kansverdeling tot en met de kans op totaal 10.000 door willen rekenen voor het totaal van schades met mogelijke waarden van 1 tot en met 100, is de computer met het algoritme van daarnet ongeveer 700 maal zo lang zoet als met Panjers recursie. Panjers publicatie heeft geleid tot een hausse aan papers met recursieve algoritmen voor de meest exotische verdelingen, onder andere in een paper van Goovaerts en Kaas (1991) voor de compound Generalized Poisson verdeling, die zijn toepassing vindt in de epidemiologie.

Aan deze universiteit is de ruimte onderzocht die er ligt 'tussen' het individuele en het collectieve model. Een geschikte maat voor de totale ruimte daartussen is het variantieverschil. Groot blijkt die ruimte niet te zijn, zie Kaas en Van Heerwaarden (1988). Hoewel in het collectieve model denkbaar is dat bijvoorbeeld een levensverzekeringspolis meermaals een bedrag moet uitkeren, terwijl dat in het individuele model hoogstens één keer moet, blijkt dat de collectieve benadering heel nauwkeurig is, zeker in het licht van andere foutenbronnen. De onnauwkeurigheid die ontstaat doordat er enige positieve afhankelijkheid is tussen de polissen (cumulatie) of door de noodzaak iemands leeftijd en/of het uitkeringsbedrag op een geheel getal af te ronden, is bijvoorbeeld veel groter; men zie Kaas (1994). Algoritmen bijna even snel als Panjers recursie en bijna even nauwkeurig als convolutie krijgt men door de contracten met hoge risicopremies uit te zonderen van de collectieve benadering.

Niet alleen voor toepassing van de nutstheorie is het van belang de kansverdeling van de totaalschade te kennen. Ook kan men hiermee de kans berekenen dat men aan een bepaald kapitaal voldoende heeft om niet aan schadebetalingen

bankroet te gaan. Behalve de verdelingsfunctie van de totaalschade zijn ook de quantielen ervan van belang. Hiermee kan men de zogenaamde *value-at-risk* bepalen. Deze is het kapitaal dat met een voorgeschreven grote kans, bijvoorbeeld 99 van de 100 keer, voldoende is om alle schades te kunnen betalen.

Ondanks de rekenkracht van de huidige computers is er nog steeds behoefte aan benaderingen voor de betrokken kansverdelingen, niet alleen vanwege de snelheid, maar ook vanwege de analytische mogelijkheden. Omdat het bij verzekeringsportefeuilles gaat om sommen van een groot aantal op elkaar lijkende en vrijwel onafhankelijke stochasten, suggereert de Centrale Limietstelling normale benaderingen, maar deze blijken niet nauwkeurig genoeg. Er is veel onderzoek verricht naar kleine aanpassingen van de normale verdeling om de *fit* te verbeteren. Rond 1970 waren zulke benaderingen een *hot topic*; in het eerstejaarscollege statistiek van mijn afstudeerhoogleraar professor Hemelrijk werd onder meer de 'Molenaar benadering' gebruikt om de binomiale verdeling te benaderen door de Poisson verdeling, zie Molenaar (1970). Bedenk dat in die tijd pc, spreadsheet en zelfs zakjapanner nog moesten worden uitgevonden; een rekenliniaal en tabellen of een nomogram waren de middelen waarmee gewerkt moest worden. Uit al het onderzoek uit die tijd naar betere benaderingen hebben we twee technieken behouden in ons boek. Allereerst behandelen we een methode die de totaalschade niet met een normale verdeling benadert, maar met een Gamma verdeling, over zekere afstand naar links of rechts verschoven. De benadering met deze verschoven Gamma verdeling is zeer goed. De actuaris is vooral geïnteresseerd in de kansen op veel schade, bijvoorbeeld voor het uitrekenen van 'stop-loss premies' en values-at-risk, en in dat gebied is de gewone normale benadering, gebaseerd als zij is op een symmetrische en dunstaartige verdeling, veel slechter. Een schadeverdeling heeft veelal de algemene vorm van een Gamma verdeling: het is een ééntoppige verdeling die links begrensd is maar rechts een dikke staart heeft. De normale benadering past alleen verwachting en variantie aan. De verschoven Gamma benadering kent als derde parameter de schuiving over een bepaalde afstand. We kiezen de parameters zodanig dat ook de scheefheid overeenkomt.

De tweede is de Normal Power (NP) benadering. Deze geeft ten naaste bij dezelfde nauwkeurigheid, maar is uit te rekenen met behulp van een simpele rekenmachine en een standaardnormale tabel, dus ook op tentamens. Waarom deze een goede benadering geeft, is echter veel moeilijker uit te leggen.

4) Het klassieke ruïnemodel

Behalve hoe de totaalschade verdeeld is, is ook van belang in hoeverre premies en schades tot een financieel stabiel systeem leiden. Dit kan men beoordelen met het ruïnemodel. Hierin wordt het verloop in de tijd van het totale kapitaal van een verzekeraar bekeken. We nemen aan dat de stijging door premie-inkomsten daarvan lineair is, door alleen te kijken naar het stuk daarvan dat niet vooruitbetaald is. Dalingen in het kapitaal zijn er in het klassieke ruïnemodel alleen door schadebetalingen, en deze volgen een (compound) Poisson proces. Behalve op realisaties die leiden tot ruïne (deconfiture) is er, als tenminste gemiddeld meer premie binnenkomt dan er uitgaven voor schaden zijn, ook een positieve kans op realisaties waarbij men nooit bankroet gaat, en het kapitaal steeds maar aangroeit. De ruïnekans is de kans dat het kapitaal ooit onder het niveau nul zakt, onder de aanname dat premie, schadeaantallen en schadehoogte stationair blijven, en biedt dus een goede maat voor de financiële stabiliteit. Men kan in dit model laten zien dat als de ruïnekans 1 op 10 is, we het beginkapitaal ongeveer moeten verdubbelen om deze naar 1 op 100 te krijgen, en verdrievoudigen om die kans naar 1 op 1000 te brengen.

Op de ruïnekans als maat voor de stabiliteit valt nog wel het een en ander af te dingen. Zo zijn ingrepen in het klassieke ruïneproces uitgesloten: slechte, zowel als goede risico's blijven gewoon in portefeuille, tegen dezelfde premie. Ook dividend-uitkeringen vinden niet plaats, hoe hoog het kapitaal ook oploopt. Verder worden inflatie en rendement-op-kapitaal geacht elkaar precies op te heffen. Bovendien is het relevanter om een eindige tijdshorizon te bekijken; politici kijken vier jaar vooruit, managers nog korter, maar zelfs de actuaris is niet geïnteresseerd in wat er over een eeuw met zijn maatschappij gebeurt. Daarnaast worden de boeken in de praktijk alleen op gezette tijden opgemaakt, bijvoorbeeld per 1 januari. Het kan best zijn dat we op 1 december feitelijk in deconfiture waren, maar dat we door een gunstige decembermaand met oudjaar weer in de plus staan. Men heeft allerlei methoden voorgesteld om deze gebreken van het ruïnemodel te verhelpen. De modellen die daaruit komen missen echter steevast een aantal wenselijke eigenschappen die het klassieke ruïnemodel wel heeft, zijn lastiger in het gebruik en niet essentieel realistischer.

Het uitrekenen van de ruïnekans kan analytisch geschieden als de claims exponentieel verdeeld zijn, of kleine variaties daarop, zoals de som van een aantal expo-

nentiële stochasten. Ter gelegenheid van een bezoek aan de Universiteit van Amsterdam van Hans Gerber verscheen het artikel Gerber *et al*. (1987) daarover, dat nog veelvuldig geciteerd wordt. Ook is er een expliciet algoritme als de claims discreet zijn en slechts weinig mogelijke waarden hebben. Scherpe boven- en ondergrenzen zijn echter vrij eenvoudig af te leiden, gebruikmakend van Panjers recursie en het feit dat de non-ruïnekans geschreven kan worden als de verdelingsfunctie van een compound geometrische stochast, en wel het totaal van alle diepterecordverbeteringsbedragen in het ruïneproces. Er is ruïne als dat totaal het beginkapitaal overschrijdt, en anders niet.

5) Premieprincipes en risicomaten

De tot dusverre behandelde modellen worden geacht tot het dagelijks gedachtegoed van elke actuaris te behoren, in de VS, Europa en ook daarbuiten. Er worden in ons boek *Modern ART* echter nog een aantal modellen en paradigma's opgevoerd die traditioneel tot het schadeactuariaat gerekend worden, en in het curriculum van onze actuariaatopleiding voorkomen maar ook voor elke actuaris buiten Nederland en België nuttig zijn.

Een premieprincipe is een voorschrift hoe een premie te bepalen voor een risico met een bepaalde kansverdeling. Een eenvoudig principe is de nettopremie, die aan een stochast als premie de verwachtingswaarde ervan toevoegt. Men kan dit en andere premieprincipes uit het eerder genoemde nutsmodel afleiden; de grenspremie voor een risico is dan juist het bedrag waarbij het de beslisser niet uitmaakt of hij het risico loopt dan wel dat bedrag verbeurt. Hij zal alleen een verzekering aangaan als de gevraagde premie ervoor lager is dan die grenspremie. Bij lineair nut resulteert de nettopremie, bij exponentieel nut de exponentiële premie.

Ook kunnen premies worden afgeleid uit het ruïnemodel. Zo kan men zich de vraag stellen welke jaarpremie men moet vragen om bepaalde oogmerken te bereiken, bijvoorbeeld om de ruïnekans hoogstens 1% te laten zijn. Bühlmann (1985) heeft een *top-down*-benadering voorgesteld, waarbij de premie én het aan de portefeuille ter beschikking gestelde werkkapitaal zodanig bepaald worden dat bij een gegeven jaarlijks dividend en een bepaalde bovengrens voor de ruïnekans, de verzekeraar zo concurrerend mogelijk is, dus een zo laag mogelijke premie nodig heeft. Op het *down*-niveau wordt de per polis te vragen premie zo vastgesteld dat aan de strategische doeleinden voldaan wordt, hoeveel polissen er ook verkocht worden.

Vaak gebruikt men in theorie en praktijk de value-at-risk als maat voor het risico, zijnde het bedrag dat bijvoorbeeld eens per duizend keer door de schadebetalingen overschreden wordt. Maar deze kans en dat bedrag geven geen goed beeld, immers men heeft geen idee of de overschrijding in dat ene geval uit duizend heel klein is of juist gemiddeld astronomisch groot. Omdat uiteindelijk er toch iemand de gehele schade zal moeten voldoen, is een betere maat dan de kans om boven een bepaalde drempel te komen, de premie die men zou moeten betalen om het deel van het risico boven die drempel over te dragen. Dat is dus een stop-loss premie. Zo'n risicomaat heeft in ieder geval de economisch en actuarieel enig juiste dimensie, namelijk 'geld'.

6) Bonus-malussystemen

Eerder noemde ik al het NPSA-onderzoek, het grootscheepse statistische onderzoek naar een goed bonus-malussysteem voor autoverzekeringen. Bonus-malussystemen zijn Markov-ketens, waarbij men van de ene toestand (dus hoogte van de bonus) naar de andere springt op grond van gebeurtenissen in het betreffende polisjaar, dus zonder dat het verleden meespeelt. Dergelijke technieken vinden ook toepassing bij leven- en pensioenactuariaat.

Een fenomeen dat optreedt bij bonus-malussystemen voor autoverzekeringen is dat van de *bonushonger*. Dit houdt in dat een automobilist die slechts weinig premie hoeft te betalen op grond van zijn schadeverleden, maar nu een schade maakt, geneigd zal zijn deze voor eigen rekening te nemen, om zijn bonus niet te verliezen. De problematiek leent zich voor beschrijving met de technieken van de stochastische besliskunde, men zie bijvoorbeeld al De Leve (1972).

7) Credibiliteitstheorie

Een andere manier om, net zoals bij bonus-malussystemen, het schadeverleden in de premie te verwerken, is met credibiliteitstheorie. Dit is een manier om uitgaande van slechts weinig gegevens, en voor een portefeuille die ingedeeld is in een aantal groepen, premies te genereren die aansluiten bij wat deze premie naar de mening van de actuaris zou moeten zijn. Enige kenmerken van zo'n premiesysteem die elke actuaris aanspreken zijn:

- als de groep groot is, moet de premie nauw aansluiten bij de waargenomen gemiddelde schade ervan;
- als de groep een zeer constant schadeverloop kent, hetzelfde;
- voor kleine groepen, of grillige groepen, is de groepservaring juist minder belangrijk dan de ervaring voor het gehele collectief.

De te vragen credibiliteitspremie is een gewogen gemiddelde van groepservaring en collectieve ervaring, waarbij de optimale weegfactor van de individuele ervaring de 'credibiliteit' daarvan heet, immers dat is de mate waarin men aan die ervaring geloof moet hechten. De optimale credibiliteitspremie blijkt te schrijven te zijn in de gebruikelijke vorm van een geschatte risicopremie, dus als totale schade-uitkering gedeeld door het aantal polisjaren, wanneer men zowel in teller als noemer hiervan corrigeert voor enige 'virtuele ervaring', die afhangt van de binnenvariantie in de groepen ten opzichte van de tussenvariantie.

Soms is in het actuariaat de praktijk de theorie te snel af geweest. Zo ook bij credibiliteit. Het systeem van credibiliteitspremies dateert al van voor de Eerste Wereldoorlog. De statistische fundering eronder werd echter pas gelegd door Bühlmann (1967, 1969), een van de prestaties waarvoor de UvA hem in 1992 een eredoctoraat verleende. Hij toonde aan dat men een credibiliteitsschatter krijgt door de lineaire schatter te berekenen die de gemiddelde kwadratische fout van de predictie voor de schade-volgend-jaar minimaliseert. Zijn model omvatte een nogal abstracte stochastische risicoparameter Θ, en werkte met voorwaardelijke verwachtingen en varianties, gegeven deze Θ. Anderen, met name Norberg, hebben deze theorie ook gegoten in een vorm die de schatters beschrijft als projecties in een Hilbert ruimte. Dennis Dannenburg (1996) heeft voor zijn promotieonderzoek bij de UvA onder meer een didactisch verre te prefereren manier uitgewerkt om het credibiliteitsmodel te presenteren. Zijn model waarin het schadecijfer wordt gesplitst in additieve stochastisch onafhankelijke componenten Ξ, specifiek voor elke groep en voor elke groep/jaarcombinatie, brengt slechts een gering verlies aan algemeenheid mee, maar is wel veel eenvoudiger uit te leggen en te behandelen. Bovendien biedt deze representatie aansluiting bij de econometrische literatuur over variantiecomponentenmodellen, en ingeval ook nog normaliteit van de data ondersteld wordt, bij de variantieanalyse. Deze laatste techniek kan gebruikt worden om toetsen mee te doen en schatters af te leiden.

8) Gegeneraliseerde Lineaire Modellen

Credibiliteitstheorie gebruikt als data alleen rijtjes schadecijfers en volumes. Vaak kent de actuaris echter meer gegevens. Het groepsnummer bijvoorbeeld kan een variabele zijn waarvan evident is dat deze samenhangt met het gelopen risico. Een voorbeeld is de gewichtsklasse van een auto: hoe zwaarder, hoe grotere schade bij een botsing, maar ook hoe meer kilometers er met die auto gemaakt worden.

Bij zulke gegevens kan de actuaris al gauw beter zijn toevlucht nemen tot technieken die verwant zijn aan de multipele lineaire regressie. Vaak voldoen de data niet rechtstreeks aan de eisen voor dat model; het tegelijk gelden van symmetrie (normaliteit), constante variantie én additiviteit van systematische effecten is veelal geen realistische assumptie. Om te proberen daar toch aan te voldoen worden vaak de data getransformeerd, maar in de schadeactuariële praktijk heeft dat lang niet altijd het beoogde effect. Voor Poisson verdeelde aantallen bijvoorbeeld vormt het nemen van de logaritme de aanwezige multiplicatieve systematische effecten om in additieve, leidt de wortel nemen tot een constante variantie, maar wordt symmetrie bereikt door de derdemachtswortel te nemen. Transformaties hebben verder als nadeel dat we nu eenmaal niet echt geïnteresseerd zijn in karakteristieken van geld op een logaritmische schaal, maar in ongetransformeerd geld. Mathematisch-statistische optimaliteitseigenschappen gaan soms verloren bij de terugtransformatie.

Gegeneraliseerde Lineaire Modellen stellen minder eisen, en zijn dus breder toepasbaar in het actuariaat. Zij omvatten onder meer Poisson regressie, ANOVA, Probit- en logitanalyse en nog een aantal modellen. Wat multipele regressie is voor de econometrist, zouden Gegeneraliseerde Lineaire Modellen kunnen betekenen voor de actuarieel statisticus. Deze hoeft overigens, maar dat terzijde, niet altijd per se een actuaris te zijn, noch een mathematisch statisticus; vaak vervullen econometristen deze rol.

9) IBNR-methoden

De balans van elke schadeverzekeraar vermeldt een bedrag dat is opzijgezet voor nog te verrichten betalingen. Een statistisch interessante component hiervan is de IBNR-voorziening, dat is het geschat totaal aan betalingen te verrichten aan schaden die *Incurred, But Not Reported* zijn, of aanverwante schaden. De data zijn van de

volgende vorm: voor de kalenderjaren vanaf een zeker beginjaar tot nu zijn voor elk polisjaar en elk kalenderjaar schadecijfers voor dat polisjaar en dat kalenderjaar beschikbaar. Men zet deze neer in een driehoek met gegevens, per rij voor hetzelfde polisjaar, per kolom voor hetzelfde ontwikkelingsjaar. Kolom 1 betreft dus de schades die binnen één jaar geclaimd zijn, kolom 2 die in het tweede jaar, enzovoorts. Econometristen zullen in deze driehoek per kolom een tijdreeksje zien, maar de ontwikkeling in de tijd wordt ook waargenomen door een panel van afwikkelingsjaren. Om de totaal nog te verrichten betaling te taxeren, moet men de afwikkelingsdriehoek volschatten tot een vierkant, of zelfs naar rechts aanvullen tot een rechthoek. Het totaal van de aanvullingen bepaalt de aan te houden voorziening.

Men kan als model voor deze getallen een product nemen van drie factoren, een α die het totaal aantal gevallen claims in het polisjaar weergeeft, dus voornamelijk de portefeuillegroei weerspiegelt, een β die het afwikkelingspatroon aangeeft, dat wil zeggen welk gedeelte in welk ontwikkelingsjaar nog geclaimd wordt, en een γ die als de schadecijfers betalingen voorstellen, gewoon het karakter heeft van een inflatie-index. Maar in geval van schadeaantallen geeft deze factor γ voor elk kalenderjaar weer in hoeverre de rechterlijke macht toen geneigd was claims te honoreren. De waarden van al deze factoren worden zodanig bepaald dat zij zo aannemelijk mogelijk zijn gezien de al gedane waarnemingen. Neemt men voor de kansverdeling in het model de normale, Poisson, Gamma of de altijd lastige Inverse Gaussiaan (zie echter Ter Berg, 1994), dan krijgt men op deze wijze een Gegeneraliseerd Lineair Model. Men kan één van de drie manieren waarop de tijd op het aantal betalingen inwerkt elimineren door bijvoorbeeld de factoren γ weg te laten. Dan krijgt men, als de stochastiek Poissonwetten volgt, de Chain-Ladder methode, die dus een bijzonder geval is van een Gegeneraliseerd Lineair Model. Als zodanig is de Chain-Ladder methode een strikt respectabele en statistisch goed onderbouwde methode, en niet de houtje-touwtjeheuristiek waarvoor deze vaak versleten wordt. Er zijn diverse kampen in de wereld en ook in Nederland wat betreft te gebruiken IBNR-methoden. Merkwaardigerwijze lopen daarbij de emoties soms hoog op.

10) Ordenen van risico's

Als laatste van deze serie uiteenlopende paradigma's die het reilen en zeilen van de verzekeraar beogen te beschrijven bevat ons boek een onderwerp waarvan de onderzoekgroep actuariaat aan de UvA, mede in het kader van het promotie-

onderzoek van Angela van Heerwaarden (1991), in hoge mate de *state-of-the-art* bepaald heeft, namelijk het ordenen van actuariële risico's. We hebben hierover indertijd twee studieboeken geschreven, namelijk het eerste deel van Goovaerts *et al*. (1990) en Kaas *et al*. (1994).

Als men een bepaald kansmodel vervangt door een ander, is het van belang te weten welke richting de afwijkingen hebben die dat met zich meebrengt, en ook hoe groot deze zijn, in totaal dan wel maximaal. In de actuariële theorie zijn twee ordeningsconcepten van belang. De ene actuarieel relevante ordening is tussen mogelijke verliezen waarvan er één in essentie groter is dan de andere. Wat er gebeurt met een kansmodel waarin men een component door een grotere vervangt is meestal gemakkelijk na te gaan. Belangrijker is de zogenoemde stop-loss ordening. Basis hiervoor is dat wie zekerheid boven onzekerheid prefereert, ook van twee verliezen datgene zal prefereren met kleinere kansen op extreme waarden. Zet men dit consequent voort door te bedenken dat wie X boven Y prefereert én Y boven Z, ook X boven Z verkiest, dus de transitieve afsluiting van deze ordeningsrelatie neemt, dan krijgt men juist alle paren verliezen waartussen alle risicoaverse beslissers eendrachtig dezelfde voorkeur hebben. Deze paren heten stop-loss geordend omdat men kan bewijzen dat voor elke waarde van het eigen risico, de stop-loss premies van de riskantste groter zijn, en vice versa.

In actuariële modellen wordt heel vaak een stochast vervangen door een andere met dezelfde verwachting, die dus niet 'groter' kan zijn. Vandaar dat stop-loss ordening voor het actuariaat zo nuttig is. Een belangrijk resultaat is dat de gebruikelijke keuze voor het collectieve model als benadering voor het individuele tot een riskanter claimtotaal leidt, en dus aanleiding geeft tot enigszins conservatieve beslissingen over premies en acceptatie. Een andere fraaie eigenschap is dat in een klassiek ruïnemodel, als de individuele claims vervangen worden door riskantere en/of grotere, de ruïnekans bij elk beginkapitaal omhoog gaat als de omstandigheden verder ongewijzigd blijven.

In de laatste jaren heeft het actuariële onderzoek naar ordening van risico's een krachtige impuls gekregen doordat de stap is gezet naar sommen van afhankelijke risico's, in plaats van onafhankelijke zoals bij het individuele en het collectieve model. Dhaene, Goovaerts en Denuit waren hierbij pioniers. Intuïtief is duidelijk dat het voor risicomijders aantrekkelijk is om als het risico van Jansen en Pietersen gelijk is, de helft van Jansens risico door dat van Pietersen te vervangen: risicospreiding dus. Het totaal is immers minder riskant omdat ongunstige resultaten bij Jan-

sen mogelijk goedgemaakt worden door gunstige bij Pietersen (*hedging*). De meest riskante som van uitkeringen op polissen krijgt men als deze uitkeringen zo samenhangen dat ze allemaal tegelijk groot en klein zijn, in andere woorden: comonotoon. Op deze wijze is aansluiting gevonden bij het vakgebied financiering: afhankelijkheden worden daar ingebracht door koersfluctuaties. Comonotonie is het *worst case* geval van afhankelijkheid, en leidt tot grenzen voor allerlei grootheden die anders met grote aantallen simulaties geschat moeten worden. Ook ondergrenzen kunnen worden bepaald. In essentie is de kansverdeling van een comonotone n-vector van stochasten eendimensionaal, zodat deze grenzen redelijk eenvoudig te berekenen zijn.

4. Toekomst van de leerstoel

Een oratie is het moment bij uitstek om even in de kristallen bol te kijken en stil te staan bij de toekomstverwachtingen voor de leerstoel en zijn directe omgeving. Het onderzoek over de toepassing in actuariaat en financiering van sommen van afhankelijke risico's zal krachtig worden voortgezet; hetzelfde schrijverscollectief dat getekend heeft voor *Modern ART*, aangevuld met David Vyncke van de KU Leuven, heeft over deze materie nog een aantal tekstboeken/researchmonografieën voor de internationale markt in de steigers staan. Ook enige aio's en een postdoc aan de UvA zullen onderzoek doen op het grensvlak van financiële econometrie, financiering en actuariaat. Daarnaast blijft er nog aandacht voor Gegeneraliseerde Lineaire Modellen als instrument voor IBNR en tarificatie, in samenwerking met de City University te Londen.

De plannen voor de omvorming van de actuariële doctoraalopleiding naar de bachelor-masterstructuur, die op 1 september 2002 van start gaat, krijgen in deze dagen vaste vorm. Mede op grond van initiatieven en signalen uit het actuariële veld, met name van Peter Kuys en Ton Kool, voormalig UvA-medewerker, gaan de nieuwe bacheloropleiding én de nieuwe masteropleiding meer elementen van het economische vakgebied financiering omvatten. En naast de traditionele, technische, actuaris gaan we ook een financieel actuaris opleiden, die nog sterker de kant van financiering en financiële econometrie opgaat. Zo is voor de masteropleiding een prominente plaats ingeruimd voor het vak Asset-Liability Management, als overkoepelend vak boven de financierings- en de actuariële aspecten van de oplei-

ding. Na vele jaren praten wordt dus nu eindelijk de AFIR-actuaris (waarbij de term AFIR, alleen bekend onder actuarissen, staat voor Actuarial Approach to Financial Risks) in Nederland op de rails gezet. Met deze nieuwe invulling denkt de UvA de actuariële en aanpalende markt in de toekomst goed te kunnen bedienen, en hopen wij de concurrentie, die allerlei opleidingen met een veel mindere actuariële component erin naar voren brengt, de baas te blijven.

5. Dankwoorden

Geen mens opereert in isolement. Velen helpen mee om de omgeving te scheppen en in stand te houden waarin een mens gedijen kan. Er zijn enkele personen die ik speciaal zou willen bedanken.

In de eerste plaats mijn collega en promotor Marc Goovaerts. De sectie actuariaat heeft veel aan Goovaerts te danken. Door zijn toedoen is het internationale aanzien van de sectie actuariaat aan de UvA reusachtig gestegen, en is het schadeonderwijs er met vliegende start van de grond gekomen, tot een niveau waarop men jaloers kan zijn. Ik overdrijf niet als ik zeg dat ik zonder zijn inbreng hier niet zou hebben gestaan.

In de tweede plaats dank ik Henk Wolthuis. In de lange periode waarin hij het actuariaat aan de UvA bestierde, heeft hij enorm veel bereikt. Zo heeft hij bijvoorbeeld in 1984 na vele jaren zwoegen het bijzonder hoogleraarschap, gefourneerd door de Stichting Verzekeringswetenschap en het Verbond van Verzekeraars en bekleed door Goovaerts, van de grond weten te krijgen. Jarenlang leidde ik onder zijn paraplu een rustig bestaan in de sectie actuariaat, me wijdend aan onderwijs en onderzoek, tot ik van de ene dag op de andere zijn managementstaken erbij moest nemen. Het was een periode waarin de sectie ook verder door ziekte geplaagd werd: we moesten afscheid nemen van de betreurde Bob Alting von Geusau, wiens afscheidsrede ons allen nog op het netvlies gegrift staat. Udo Smids afscheidsrede kort geleden was eveneens een emotioneel moment. De gelukkig tijdelijke afwezigheid van Wolthuis heeft echter één positief gevolg gehad, en dat is dat mijn carrière in een stroomversnelling gebracht werd, anders had deze oratie misschien nog wel een aantal jaren op zich laten wachten.

Verder dank ik mijn collega's van de Afdeling Kwantitatieve Economie van de Faculteit der Economische Wetenschappen en Econometrie. Op luttele weken na

precies een kwart eeuw loop ik nu in hun midden rond, en het bevalt me nog steeds. Men kan aanvoeren dat het saai is zo lang in dezelfde omgeving te blijven, maar gelukkig zorgen gezagsdragers van faculteit, universiteit en ministerie in eendrachtige samenwerking dat het universitaire bestaan eigenlijk nooit een sleur wordt. Onder het voorzitterschap Jan Kiviet bloeit en groeit de afdeling Kwantitatieve Economie als nooit tevoren; de ene grote subsidie voor econometrisch onderzoek na de andere komt binnen.

Tevens dank ik alle studenten. Voor jullie doen we het allemaal, zo beweren velen vanuit deze positie, al heb ik daar mijn gerede twijfels over. Blijf je best doen, val me lastig met vragen, maar gebruik je studietijd goed, niet alleen om actuariële kennis op te doen, maar ook voor je verdere ontwikkeling. Werken kun je in principe nog ruim veertig jaar. Neem een hobby, maak vrienden, verken de wereld. Zo heb ik het ook gedaan, al ging dat toen wat makkelijker.

In mijn proefschrift veertien jaar geleden kon ik nog mijn ouders danken. Helaas heeft geen van hen mijn oratie mogen meemaken. Ze zouden naast hun schoenen hebben gelopen van trots!

Tot slot dank ik mijn gezin, Petra, Steven en Jochem. Ik zou nu natuurlijk kunnen zeggen dat ik dit alles voor jullie doe, maar ik vind het zelf ook leuk. Het gezin moge sinds Paars niet meer erkend de hoeksteen van de samenleving zijn, maar het is dat wel van mijn eigen bestaan en functioneren. Zonder jullie zou dit er toch mogelijk niet van gekomen zijn.

Ik heb gezegd.

Referenties

AG-tafels (1997). *AG-Tafels 1990-1995*, Actuarieel Genootschap, Amsterdam.

Allais M. (1953). 'Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'Ecole Americaine', *Econometrica*, 21, 503-546.

Bühlmann H. (1967). 'Experience rating and credibility I', *ASTIN Bulletin*, 4, 199-207.

Bühlmann H. (1969). 'Experience rating and credibility II', *ASTIN Bulletin*, 5, 157-165.

Dannenburg D.R. (1996). *Basic actuarial credibility models. Evaluations and extensions*, Ph.D. Thesis, Thesis/Tinbergen Institute, Amsterdam.

Gerber H.U., Kaas R., Goovaerts M.J. (1987). 'On the probability and severity of ruin', *ASTIN Bulletin*, 17, 151-164.

Goovaerts M.J., Kaas R., Heerwaarden A.E. van, Bauwelinckx T. (1990). *Effective Actuarial Methods*, North-Holland, Amsterdam.

Goovaerts M.J., Kaas R. (1991). 'Evaluating compound generalized Poisson distributions recursively', *ASTIN Bulletin*, 21, 193-198.

Heerwaarden A.E. van (1991). *Ordering of risks – Theory and actuarial applications*, Ph.D. Thesis, Thesis/Tinbergen Institute, Amsterdam.

Kaas R., Heerwaarden A.E. van, Goovaerts M.J. (1988). 'Between individual and collective model for the total claims', *ASTIN Bulletin* 18, 169-174.

Kaas R. (1994). 'How to (and how not to) compute stop-loss premiums in practice', *Insurance: Mathematics and Economics*, 13, 241-254.

Kaas R., Heerwaarden A.E. van, Goovaerts M.J. (1994). *Ordering of actuarial risks*, Institute for Actuarial Science and Econometrics, University of Amsterdam.

Kaas R., Goovaerts M.J., Dhaene J., Denuit M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Dordrecht.

Langerak G. (2001). Persoonlijke mededeling.

Leve G. de, Tijms H.C. (1971). *Leergang Besliskunde, deel 7c: Dynamische programmering 3*, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

Molenaar W. (1970). *Approximations to the Poisson, Binomial and hypergeometric distribution functions*, proefschrift, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

Panjer H.H. (1981). 'Recursive evaluation of a family of compound distributions', *ASTIN Bulletin*, 12, 22-26.

Ter Berg P. (1994). 'Deductibles and the inverse Gaussian distribution', *ASTIN Bulletin*, 24, 319-323.

Von Neumann J., Morgenstern O. (1944). *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton.

Wit G.W. de, *et al*. (1982). *New motor rating structure in the Netherlands*, ASTIN-groep Nederland.