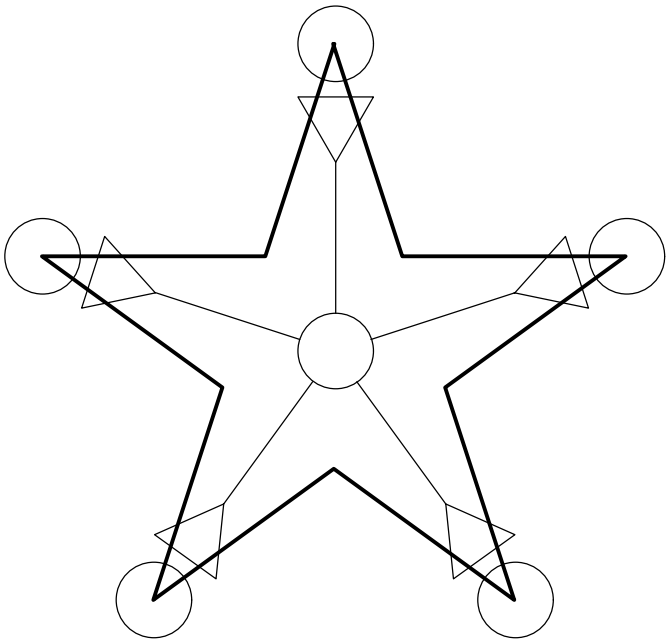
DELAYED ART



Gerard Visser
Rijksuniversiteit Groningen
Faculteit der Kunstmatige Intelligentie
Grote Kruisstraat 2/1
9712 TS Groningen
Studentnummer: 0770108
en
Prof. dr. Peter C.M. Molenaar
Universiteit van Amsterdam
Faculteit der Psychologie
Roetersstraat 15
1018 WB Amsterdam
en
dr. Maartje E.J. Raijmakers
Universiteit van Amsterdam
Faculteit der Psychologie
Roetersstraat 15
1018 WB Amsterdam

Dankbetuiging

Gaarne zou ik prof. dr. P.C.M. Molenaar en dr. M.E.J. Raijmakers, beiden werkzaam aan de Universiteit van Amsterdam, willen bedanken voor de moeite die ze hebben willen doen om mij bij dit onderzoek te begeleiden en te helpen dit tot een goed einde te brengen.

Tevens zou ik dr. H.A.K. Mastebroek willen bedanken voor de moeite die hij heeft gedaan in het doorwerken van een voorlopige versie van dit doctoraalverslag, en de suggestie's voor verbetering die hij mij heeft gegeven.

Groningen, zomer 2002

Vademecum - Vadetecum.
Es lockt dich meine Art und Sprach,
Du folgest mir, du gehst mir nach?
Geh nur dir selber treulich nach:-
So folgst du mir - gemach! gemach!

Friedrich Nietzsche

Dem wird befohlen,
der sich nicht selber gehorchen kann.

Friedrich Nietzsche

Und den Herrschenden wandt ich den Rücken,
als ich sah, was sie jetzt Herrschen nennen:
Schachern und Markten um Macht -
mit dem Gesindel!

Friedrich Nietzsche

De patiënt behoort tot die grote categorie van mensen
die prijs stellen op wereldlijke autoriteit,
die verlangen overbluft, vulgariter overduveld, te worden.

Sigmund Freud

Nu leert de praktijk van het leven ons,
dat vele menschen vatbaar zijn voor suggestie's,
wanneer wij tegen hen slechts met het noodige zelfvertrouwen optreden.
Wij moeten onze mededeelingen op een zeer besliste wijze doen,
waardoor de gedachte aan tegenspraak of ontkenning
direct is uitgesloten, en daarbij mogen we niet
aan de mogelijkheid van een mislukking denken.

Djorghi

Aufwärts.
Wie komm ich am besten den Berg hinan?-
Steig nur hinauf und denk nicht dran!

Friedrich Nietzsche

Inhoud

Voorwoord 5
1. Van den outstar en bedongen aanpassing 12
2. Van een kwantitatieve benadering van den outstar 18
3. Inleiding 20
4. Een analyse van het ODE systeem 22
5. Een analyse van het DDE systeem 24
6. Van ODE naar DDE 27
7. Van het gedrag van stelsels differentiaalvergelijkingen 29
8. Conclusies en aanbevelingen voor verder onderzoek 32

Aanhangsels 35
A. Van analytische meetkunde 36
I. Van het carthesisch coördinatenstelsel en translaties 36
II. Van hoeken 38
III. Van rechthoeken en rechthoekige driehoeken 40
IV. Van de syntaxis van tensoralgebra 45
V. Van de semantiek van tensoralgebra 49
VI. Van den draaitensor en den hoek tussen twee vectoren 55
B. Van differentiaalvergelijkingen 57
C. Van complexe getallen 62
D. JAVA-programma voor het simuleren van het ODE systeem 72
E. JAVA-programma voor het simuleren van het DDE systeem 76

Literatuur 81

Voorwoord

Is het een achterhaalde gedachte om een scherpe grens te trekken tussen alles dat zich *in* iemand afspeelt en alles *daarbuiten*? Die gedachte lijkt in ieder geval een vorm van *dualisme* te impliceren. Het komt me voor, dat *dat* voor velen de reden wezen zal, om die vraag bevestigend te beantwoorden, omdat men niet graag met dualisme geassocieerd wenst te worden. De reden hiervoor is dat dualisme vaak gezien wordt als iets onwetenschappelijks: het spreekt voor zich dat het erg vervelend gevonden wordt, om de eigen persoonlijke eer aangetast te zien - door het dualisme.

In de zeventiende eeuw schreef Descartes[1]: „On the one hand I have a clear and distinct idea of myself, in so far as I am simply a thinking, nonextended thing; and on the other hand I have a distinct idea of body, in so far as this is simply an extended, non-thinking thing. And accordingly, it is certain that I am really distinct from my body, and can exist without it".

Descartes maakt onderscheid tussen twee principieel onafhankelijke zaken[2]: *fysische materie*, die gekenmerkt wordt door het feit dat ze *niet denkend* - onbewust - is en een ruimtelijken omvang heeft, en een zogenaamde *res cogitans* of *denkende zaak*, die gekenmerkt wordt door het feit dat ze *denkend* - bewust - en zonder omvang is.

Dit idee impliceert een soort *mind stuff*, zoals Dennett dat noemt, waaraan geen fysieke energie of massa[3] toegekend kan worden. Het idee is dat onze waarnemingsorganen via de hersenen informatie doorgeven aan de ziel, die, na het nodige denkwerk verricht te hebben, de hersenen *vertelt*, wat te doen.

Het bekende argument dat dient aan te tonen dat dit nooit het geval wezen kan, is simpel: indien mind stuff niet fysisch is, hoe is het dan mogelijk, dat er interactie is met de hersenen, die per definitie wel fysisch zijn! Immers, alles dat interactie met fysische zaken hebbe, zou zelf ook fysisch moeten wezen, of in ieder geval een fysischen component bezitten.

Op het eerste gezicht lijkt het erop, dat er in dit geval eenvoudig weg een verschil van mening bestaat, over hetgeen al dan niet *fysisch* genoemd wordt. Wat dat betreft vind ik het iets uitgebreidere argument, waar Dennett in zijn boek mee komt, overtuigender: om in de fysische wereld ergens verandering in aan te brengen - onze wens - is energie nodig. Die energie kan niet uit het niets komen[4] en daarom moet een eventuele mind stuff die bevatten.

[1] Descartes, *Metidations VI*. Overgenomen uit *Philosophy of Mind*, Jaegwon Kim, 1996

[2] Dit verklaart den naam *dualisme*

[3] cf. *Consciousness Explained*, p.35, van Daniel Dennett

[4] Aardig in dit verband is een (hypothetische?) gebeurtenis, waarvan ik niet meer weet waar of van wien ik die vernomen heb; exact op den Schwarzschildstraal van een zwart gat onstaat, uit een foton, een deeltje en zijn antideeltje: het ene komt terecht net binnen

Hoe het ook zij, lijken de meeste dualistische theorieën het begrip bewustzijn op zo'n manier te behandelen, als ware het zo mysterieus, dat niemand den waren aard ervan ooit zou kunnen begrijpen, en daarom zij bewustzijn niet geschikt voor wetenschappelijk onderzoek.

Voorwaar, een afschuwwekkend zwaktebod waar men niks aan heeft: het vraagt om begrip om wille van het onbegrip!

Welke opties resten er dan nog, als het dualisme verwerpelijk is? En wordt daarmee ook *alles* waar dualisme voor staat, verworpen?

Terwijl dualisme als het ware aan het ene uiteinde van een hypothetisch continuüm staat, staat *reductionisme* aan het andere eind. Reductionisme wordt ook wel *type-physicalisme* genoemd, omdat het ieder mentaal type met precies één fysisch type identificeren wil, in een poging, het dualisme en daaraan verbonden moeilijkheden te omzeilen.

Ons leven speelt zich in maar één wereld af: de fysische[5], en daarom zijn niet alleen alle verschijnselen in onze ongedifferentiëerde wereld, *te verklaren* met behulp van de wetten der natuur: alle verschijnselen *zijn* natuur[6].

Een beroemd voorbeeld laat zich alsvolgt verwoorden.

Het mentale type *pijn* dient tot het fysische type *c-vezel stimulatie* gereduceerd te worden. De fysiologie leert ons dat mensen in hun lichaam dingen hebben, die c-vezels worden genoemd. Stimulere men nu, bij wijze van experiment, in een bepaald sujet dergelijke c-vezels, dan zal het den proefpersoon zwaar vallen, om niet blijk te geven van den toestand van pijn, waarin hij verkeert. Enigen tijd later zal het staken van deze stimulatie, ook het verdwijnen der pijn - blijkens het opgeluchte gelaat van 't sujet - met zich meebrengen: utinam dolor esset demonstratus!

Pijn zij „dus" niks meer of minder dan gestimuleerde c-vezels: bijgevolg kan het verschijnsel pijn - in al haar facetten - verklaard worden, met behulp van de kennis over de werking van deze c-vezels in het lichaam.

Prachtig!

Met het reductionisme zijn de problemen van het dualisme uit de wereld geholpen. Doch welke zijn de consequenties van het reductionisme?

Terug naar het inmiddels opgeloste probleem van het mentale type pijn. Pijn is, zoals uiteengezet, niks anders dan de stimulatie van c-vezels: sujetten zonder c-vezels kan men geen pijn gewaar doen worden.

Kunnen inktvissen die geen c-vezels hebben, daarom geen pijn hebben?

---

den Schwarzschildstraal, het andere net erbuiten. Aldus is uit niets energie gecreëerd

[5]Natuurlijk kan het argument ook worden omgedraaid: als ieder mentaal type reduceerbaar is tot precies één fysisch type, kan ieder fysisch type ook tot een mentaal type gereduceerd worden

[6]„Kein Hirt und eine Herde! Jeder will das gleiche, Jeder ist gleich: wer anders fühlt, geht freiwillig ins Irrenhaus." F. Nietzsche [10]

Blijkbaar niet!

Mogen inktvissen dan in een laboratorium opgesloten en zonder enig ethisch bezwaar[7] aan de meest exotische proeven en met zeer ernstige verminkingen ten gevolge, blootgesteld worden? Inktvissen, toch, kunnen geen pijn kennen!

In 1967 kwam Hilary Putnam met een soort gelijk argument, dat het reductionisme noodlottig moest worden. Het centrale idee dat hieraan ten grondslag ligt, is „the multiple realisability of mental properties". Men realiseerde zich, dat een bepaald concept op zeer verschillende wijzen fysisch realiseerbaar is, gelijk de wegen die naar Rome leiden.

Kim [8] legt dit uit, aan de hand van het concept *motor*. Het is om het even, van welke specifieke materialen de motor gemaakt is of hoeveel cylinders hij heeft of welken brandstof hij verbruikt; zolang het object een of meer soorten van energie omzet in mechanische energie, te gebruiken ten gunste van de voorbeweging van voertuigen, telt 't object mee, als motor: alle motoren - ongeacht hun fysieke implementatie - hebben dezelfde *functie*!

Deze lijn, nu, wordt doorgetrokken naar mentale concepten. De denktrant is een weinig door de evolutietheorie geïnspireerd. Pijnsensatie bestaat bijvoorbeeld niet voor niets. Pijn zal voor onze overlevingskansen een bepaald *natuurlijk* nut moeten dienen.

Dat nut, of die functie, van pijn laat zich gemakkelijk raden: men krijgt veelal pijn, als er beschadigingen aan het lichaam - of de psyche - aan den dag treden. Dergelijke beschadigingen kunnen tot den dood leiden en het is voor het vergroten der overlevingskansen, daarom zaak, de schade aan lichaam en geest[8] zoveel mogelijk beperkt te zien.

Dat de natuur reductie van schade - en daarmee uitstel van den dood - middels pijn, afdwinge!

Volgens dit zogenoemde *functionalisme* kunnen ook dieren zonder c-vezels in pijnlijken toestand verkeren: hun pijn komt langs een ander pad.

Het feit dat het functionalisme den vloer grondig heeft aangeveegd met het reductionisme en zich daarvan in naam, goed laat onderscheiden, wekt den indruk, dat er een fundamentele vernieuwing plaatsgevonden heeft. Mijns inziens wordt daarmee den werkelijken stand van zaken geweld aangedaan: beide stemmen in nagenoeg alle punten overeen, met als enig verschil, dat het reductionistische voorschrift voor de implementatie afgedankt en vervangen is, door het voorschrift dat het doel de middelen heilige.

Ten tijde van het reductionisme woedde er hoogst waarschijnlijk nog een

[7] Andere ethische vragen die mogelijk in het spel zouden kunnen zijn, niet meegerekend

[8] Dank zij dualisme!

felle strijd tussen groepen wetenschappers en „de predikers des doods"[9], die, onder invloed van een auto-hypnotische trance, met man en macht en in Gods naam, een of anderen vorm van het dualisme niet enkel verdedigden, maar trachtten den wetenschappers dezen harden, strengen, ziekelijken waan, door den strot te rammen! Men moet de enorme kracht van leugens ontsproten aan een vergiftigden geest, vooral *niet* onderschatten: in 't uiterste geval vermag zij, der gehele mensheid dood en verderf op den hals halen!

Het jaar waarin Putnam het functionalisme lanceerde - 1967 - suggereert, dat de jaren zestig het toneel zijn geweest, van een beslissenden strijd, die den predikers van den langzamen dood - die *voormalige* goeden en rechtvaardigen, die kleine schreeuwlelijken met hun verachtelijke „waarden en normen"[10] en kreet tot meer, àl te veel meer ijzeren dicipline, in en rondom valse heropvoedingskampen, waarin zij *zelf* heròpgevoed zouden moeten worden - groten deels den mond gesnoerd heeft: het zwaartepunt van de *waarachtige* discussie kon zich eindelijk verplaatsen, nadat het overgebleven uitvaagsel en kreupelhout zich als fundamentalisme teruggetrokken had, onder den steen, onder welken het eens en in groten getale, vandaan was komen kruipen.

Het midden der twintigste eeuw zag ook de opkomst van den modernen digitalen computer, wiens opmars om de wereld te gaan veroveren, in de jaren zestig reeds ver gevorderd was: dit is ongetwijfeld van invloed geweest op 't feit, dat juist in dien tijd het principe der meervoudige verwezenlijking voorgesteld werd.

Vele mensen moeten erg onder den indruk zijn geweest, van 't vermogen van den computer: zelfs het zeldzame rekenwonder vermocht *niet* bij den computer in de schaduw te staan, als het gaat om snelheid en nauwkeurigheid, waarmede een berekening uitgevoerd worden kan. „Een Computer kan alles!", zo luidde het *credo*.

Voorts leert de neurologie, dat het centrale zenuwstelsel uit miljarden cellen - neuronen genaamd - bestaat, die onderling verbindingen maken en weer verbreken en voortdurend elkander middels signalen beïnvloeden: het heeft er allen schijn van, dat *ook* het zenuwstelsel één grote parallelle computer is.

Dit heeft grote consequenties voor het begrip *bewustzijn*, dat zijn oorsprong in dit zenuwstelsel vindt. Dennett [2] verwoordt dit aldus: „Since

[9]Ontleend aan Nietzsches „Prediger des Todes" [10]; heden „fundamentalisten" genaamd

[10]„Wahrlich, ihr nehmt den Mund voll mit edlen Worten: und wir sollen glauben, daß euch das Herz übergehe, ihr Lügenbolde?

Aber meine Worte sind geringe, verachtete, krumme Worte: gerne nehme ich auf, was bei eurer Mahlzeit unter den Tisch fällt.

Immer noch kann ich mit ihnen - Heuchlern die Wahrheit sagen!", F. Nietzsche [10]

any computing machine at all can be imitated by a virtual machine on a *von Neumann machine*[11], it follows that if the brain is a massive parallel processing machine, it too can be perfectly imitated by a von Neumann machine. And from the very beginning of the computer age, theorists used this chameleonic power of von Neumann machines to create *virtual* parallel architectures that were supposed to model brainlike structures. How can you get a one-thing-at-a-time machine to be a many-things-all-at-once machine? By a process rather like knitting."

Dit stevent aan op de overtuiging, dat een computer een bewustzijn kan hebben: men implementere „eenvoudig" de algorithmes die menselijke hersenen uitvoeren, in een computerprogramma en Ziet! - tijdens de uitvoering daarvan heeft *ook* de computer een bewustzijn!

Wellicht is dit de eerste theorie van bewustzijn, die op logisch consequente wijze de cirkel rond krijgt en op 't eerste gezicht nog in overeenstemming met de wetten der natuur ook. Vele theoretici haasten[12] zich dan ook, zich bij een of anderen vorm van deze theorie aan te sluiten. Doch is zij wel in overeenstemming met *alle* wetten der natuur?

In 1881 verrichtten Michelson en Morley een experiment, dat de snelheid der aarde ten opzichte van den ether[13] moest bepalen: dit leverde merkwaardig genoeg geen enkel resultaat, d.w.z. dat er geen detecteerbare snel-

[11] Dennett bedoelt een normalen computer

[12] „"Why, Dan", ask the people in Artificial Intelligence, "do you waste your time conferring with those neuroscientists? They wave their hands about 'information processing' and worry about *where* it happens, and which neurotransmitters are involved, and all those boring facts, but they haven't a clue about the computational requirements of higher cognitive functions". "Why", ask the neuroscientists, "do you waste your time on the fantasies of Artificial Intelligence? They just invent whatever machinery they want, and say unpardonably ignorant things about the brain."The cognitive psychologists, meanwhile, are accused of concocting models with *neither* biological plausibility *nor* proven computational powers; the anthropologists wouldn't know a model if they saw one, and the philosophers, as we all know, just take in each other's laundry, warning about confusions they themselves have created, in an arena bereft of both data and empirically testable theories. With so many idiots working on the problem, no wonder consciousness is still a mystery.

All these charges are true, and more besides, but *I* have yet to encounter any idiots. Mostly the theorists *I* have drawn from strike me as very smart people - even brilliant people, with the arrogance and impatience that often comes with brilliance - but with limited perspectives and agendas, trying to make progress on hard problems by taking whatever shortcuts *they* can see, while deploring other people's shortcuts.", aldus sprak Daniel Dennett [2]

[13] In de negentiende eeuw veronderstelde men, dat golfbewegingen zich slechts konden verplaatsen, indien daartoe een medium aanwezig was: *ether* was de naam voor het alom aanwezige medium, waarin elektromagnetische golven - zoals radiogolven en licht - zich verplaatsen konden

heid bleek te wezen. In 1895 kwamen Lorentz, Fitzgerald en Poincaré met twee ad hoc hypotheses, die dit resultaat moesten verklaren. Zij stelden dat massieve lichamen zouden krimpen en klokken langzamer zouden lopen, mits deze zich door den ether bewogen: dit zou apparaten, die deze snelheid van de aarde ten opzichte van den ether zouden moeten meten, op zo'n manier beïnvloeden, dat exact alle te verwachten resultaten geneutraliseerd zouden worden [7].

De vergelijkingen in welke dit resulteerde, werden tien jaar later door Einstein - o.a. door een postulaat dat met de constantheid van de snelheid van licht te maken had - nog eens afgeleid: deze zgn. *Lorentz transformaties* tonen heel duidelijk, dat ruimtelijke dimensies en de tijdsdimensie zich op een eendere wijze gedragen en onlosmakelijk met elkander verbonden zijn. Ze kunnen niet zonder elkaar bestaan en het klassieke idee van een drie-dimensionale ruimte, met los daarvan een absoluten tijd, is onhoudbaar!

Maar dit is nog niet alles. Na zijn *speciale* relativiteitstheorie is Einstein nog elf jaar met het onwikkelen van zijn *algemene* theorie bezig geweest: deze komt neer op een toevoeging der gravitatiewetten aan de speciale theorie, waarbij hij getracht heeft de principes van Mach in de theorie te vatten. Ray d'Inverno [7] omschrijft deze principes aldus.

1. „The matter distribution[14] determines geometry." 2. „If there is no matter then there is no geometry." 3. „A body in an otherwise empty universe should possess no inertial properties."

De betekenis hiervan komt op het volgende neer: wij mensen zijn niet opgebouwd uit deeltjes in een vier-dimensionalen ruimtetijd, maar de deeltjes in ons creëren (letterlijk!) den vier-dimensionalen ruimtetijd, dien wij waarnemen!

In relatie tot hetgeen Dennett claimt, merke men nu op, dat het inderdaad zo is, dat neurale netwerken - volledig bepaald door hun computationele gedrag - op den computer gesimuleerd kunnen worden, maar dat het cel voor cel ontleden der menselijke hersenen en hun anders terzelfder tijd functioneren, in den tijd op seriële wijze uit te smeren - door voor iedere cel een momentopname harer activatie passief in een geheugen op te slaan en vervolgens één voor één hetzelfde voor alle andere cellen te doen, ten einde bij eerst genoemde terug te keren voor den volgenden tijdstap - voorzeker het principe, dat ruimte en tijd onlosmakelijk met elkander verbonden zijn, schendt of daar in ieder geval al te lichtzinnig overheen springt; he does not go on to ask himself the Hard Question: *And then what happens?* ("And then a miracle occurs"?).

Voorts zijn problemen bekend, voor welke een *algorithme* bestaat, dat

[14] Van het universum

toont, dat er *geen algorithme* voor het oplossen van dat probleem bestaat: toch zijn mensen somtijds *wel* in staat, om een oplossing voor zo'n probleem[15] te vinden. Dat betekent dat mensen *onberekenbare* problemen kunnen oplossen.

Dit wekt den indruk dat algorithmes *niet een voldoende conditie* zijn, voor het ontstaan van *bewustzijn*. Bovendien zal een Dennett-achtig standpunt - mijns inziens - uiteindelijk tot het den thermostaat toekennen van enig bewustzijn[16], kunnen leiden: een weerzinwekkend vooruitzicht!

Daarmede zij echter *niet* gezegd, dat algorithmes geen rol spelen in 's mensen functioneren: zo zullen *automatisch verlopende* gedragingen - bij voorbeeld *ademhaling* - middels algorithmes geregeld worden. Tevens zou men in dit verband aan de onwillekeurige reactie, van een geconditioneerd sujet, op den geconditioneerden prikkel, kunnen denken.

In deze scriptie zal een computationeel model centraal staan, van welk het gedrag, als dat van een hond in een conditioneringsexperiment interpreteerbaar is. -

[15] Men denke aan Hilberts „Entscheidungsproblem" en Gödels reactie hierop

[16] Een thermostaat vindt 't *te koud*, *precies goed* of *te warm* in deze kamer

1. Van den outstar en bedongen aanpassing

Een **outstar** zij een theoretisch model, dat, gegeven de juiste omstandigheden, in staat is, zijn gedrag aan dat van zijn theoretische omgeving aan te passen. Waarom dit model juist outstar genoemd wordt en hoe hij in staat is, zijn gedrag aan zijn omgeving aan te passen, zal in dit hoofdstuk uiteengezet worden.

In het voorwoord is reeds gezegd, dat het gedrag van een outstar te interpreteren is, als dat van Pavlovs hond in een **classical conditioning** experiment: eerst zal dit experiment in het kort besproken worden, zodat enkele technische termen opgehelderd kunnen worden.

Dikwijls is het zo, dat honden gaan kwijlen, als er voedsel voor hun snuit gehouden wordt. Deze reactie van den hond, het kwijlen, wordt **unconditioned response** (UCR) genoemd, en treedt onwillekeurig op, gegeven de situatie dat er voedsel in zijn buurt is: **unconditioned stimulus** (UCS).

Honden kwijlen over het algemeen niet, als ze een bel horen klinken. Doch, laat men een aantal maal een bel klinken, juist voordat de koelkast geopend wordt, om er voedsel voor den hond uit te halen, dan kan men den hond al zien kwijlen bij het klinken der bel, nog voordat de koelkast open is. *Dit* kwijlen, nu, heet **conditioned response** (CR) en is een reactie op het horen van de bel, dat nu **conditioned stimulus** (CS) heet.

Sommige mensen gaan ervan uit, dat er een directe verbinding ontstaan is tussen CR en CS, i.e. tussen het kwijlgedrag en den prikkel door het horen van de bel. Anderen zetten hierbij hun vraagtekens en zeggen dat deze - emotionele - gedragingen niet kunnen ontstaan, zonder andere mentale activiteit[17].

De outstar is een voorbeeld van een systeem, in welk een rechtstreekse connectie tussen CS en CR ontstaat. -

Men stelle zich, nu, een aantal zwarte dozen voor: uit ieder dezer dozen steken drie koperen draden, twee aan den enen en een aan den anderen kant. De twee die aan den zelfden kant zitten, zijn de zgn. ingangen van die doos; de draad aan den anderen kant hete den uitgang.

Ieder van deze draden is van invloed op den internen toestand van zijn doos. Door een elektrische spanning op één der ingangen te zetten, ontstaat een andere elektrische spanning op den uitgang: dit hete het **gedrag** van de doos. Als geen der ingangen elektrisch gestimuleerd wordt, vertone de doos geen gedrag: de spanning op den uitgang is, of wordt dan snel, nul.

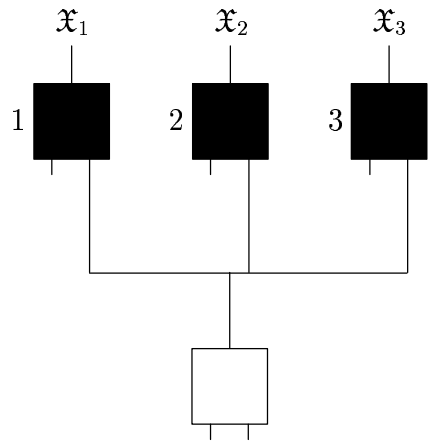
Uit een dezer dozen splitst zich de uitgang in *zoveel* koperen draden, dat

[17] cf. *Personality*, second edition, van C. Peterson, blz. 400

de spanning op den uitgang precies één keer aangesloten worden kan, op iedere andere doos.

Dat deze ene doos vanaf nu, *wit* zij!

Zo kan zij, van de andere onderscheiden worden. Aldus wordt de uitgang van de witte doos aangesloten op één der ingangen van iedere zwarte: cf. afbeelding 1.



Afbeelding 1: *De uitgang der witte splitst zich, en wordt aangesloten op één der ingangen van iedere zwarte; lege ingangen staan met korte zwarte streepjes weergegeven*

Het hierboven beschreven systeem kan worden opgevat als een outstar[18]; *zijn* gedrag, is het gecombineerde gedrag der zwarte dozen: d.w.z. de verzameling van alle elektrische spanningen op de uitgangen van de zwarte dozen.

Omdat het gedrag van een enkele doos een elektrische spanning is, kan het gedrag daarvan uitgedrukt worden, door een reëel getal: het gedrag van den outstar worde dan door een geordende[19] verzameling van reële getallen aangegeven.

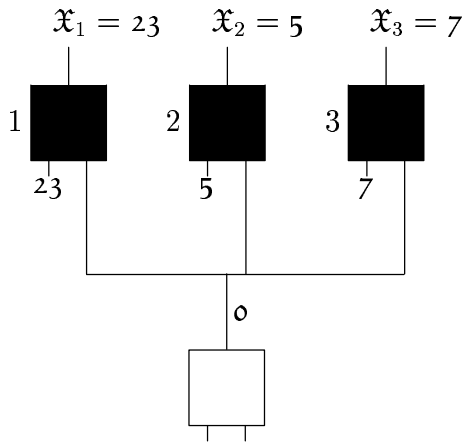
Men kan den outstar op twee manieren tot gedrag stimuleren: door de onaangesloten ingangen der zwarte dozen te prikkelen, of door de witte doos aan een ingang te prikkelen.

De eerst genoemde methode is het eenvoudigst: een elektrische spanning die op een legen ingang gezet wordt, is vrijwel meteen ook op den uitgang te

[18]Een exactere definitie volgt later

[19]Een voorbeeld: een outstar hebbe drie zwarte dozen - overeenkomend de situatie van afbeelding 1 - van welke ieder een nummer drage, van links naar rechts: 1, 2 en 3, resp. worde hun gedrag uitgedrukt door $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$. Dit laat zich samenvatten als $\mathfrak{X}_i$, waarbij $i \in \{1, 2, 3\}$. Per definitie geldt er $\mathfrak{X}_i = (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3)$; daarom heet deze verzameling geordend: het eerste getal uit het rijtje, stelt te allen tijde het gedrag der meest linkse doos voor, en zo verder

meten. Op deze wijze kan elk gewenst gedrag onmiddelijk aan den outstar worden ontlokt.



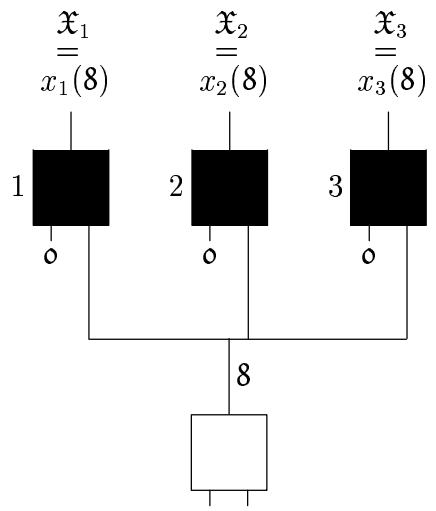
Afbeelding 2: *Als wit geen spanning aan de zwarte ingangen levert, dan is de spanning op den uitgang van een zwarte doos gelijk aan die op den onaangesloten ingang:* $\mathfrak{X}_i = (23, 5, 7)$

Het belang hiervan is, dat men van te voren *zeker* weet, welk gedrag de outstar vertonen zal, indien hij op deze manier daartoe aangespoord mocht worden. Dit komt overeen met een hond tot kwijlen aansporen, door dezen een stuk vlees voor te houden: ook dan is het gedrag van den hond van te voren bekend.

Wordt, in plaats daarvan, de witte doos gestimuleerd, dan komt een elektrische spanning op haar uitgang te staan en daarmee ook, op de zwarte ingangen, die daarmee in verbinding staan: alle zwarte dozen, of ook **gedragscomponenten**, ontvangen, uiteraard, een gelijke spanning op den aangesloten ingang. Dit is de tweede methode, om den outstar tot gedrag aan te zetten.

Het gedrag van den outstar staat nu *niet* vooraf vast, maar is van de interne toestanden der afzonderlijke gedragscomponenten afhankelijk: per component kan dat variëren van geheel geen gedrag - op den uitgang staat dan geen spanning, i.e. een spanning van nul - tot extreme opgewondenheid - op den uitgang staat hoogspanning - en alles dat daar tussenin zit.

Het prikkelen van de witte doos stelle den prikkel in het oor van den hond voor, bij het klinken van een bel. Als betreffende hond niet geconditioneerd is, kan men eveneens niet weten, hoe de hond hierop reageren zal: hoogst waarschijnlijk besteedt hij er geen aandacht aan, en vervolgt zijn gedrag van het moment en veroorzaakt door „zijn inwendigen toestand".



Afbeelding 3: *Indien er geen spanning staat op de onaangesloten ingangen, maar wit deze levert, dan zij voor elken gedragscomponent de spanning op den uitgang afhankelijk van zijn inwendigen toestand en de door wit geleverde spanning:* $\mathfrak{X}_i = ?$

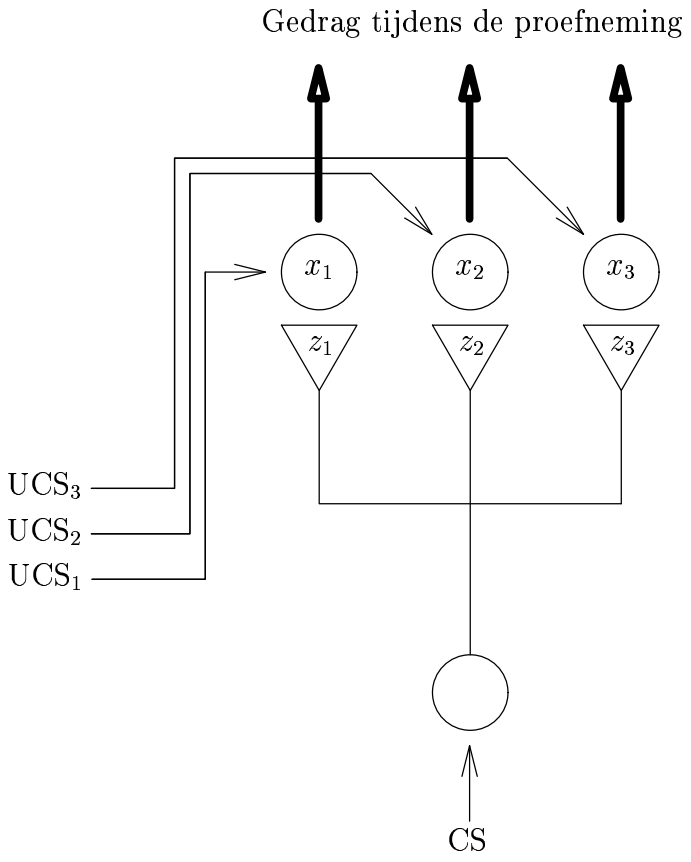
Gelet op de overeenkomst tussen het gedrag van den outstar en dat van een ongeconditioneerden hond, zal het stimuleren van den outstar zoals bedoeld in afbeelding 2, ook *het den outstar aanbieden van een UCS* (unconditioned stimulus) heten. De stimulatie in afbeelding 3 wordt in dat geval *het den outstar een CS aanbieden*, genoemd.

Bij een outstar levert de presentatie van *enkel* een UCS, aan den uitgang *zichzelf* op. Deze *onwillekeurige* reactie hete, evenals het onwillekeurige gedrag bij den hond, veroorzaakt door een UCS, *unconditioned response*: UCR. De handel en wandel van den outstar, bij het aanbieden van een CS, is zijn willekeurige CR.

Net als bij den hond, is ook de inwendige toestand van den outstar te manipuleren. Dit valt te bereiken, door den outstar eerst een CS, en *korten* tijd daarna een UCS te presenteren: de interne toestand hebbe zich een weinig aangepast.

De aldus omschreven stimulering noeme zich: **proefneming**.

Afbeelding 4 werpt een gedetailleerderen blik op den outstar tijdens een proefneming. Doordat de zich uit zwarte voorgedaan hebbende witte doos, anders is, dan de zwarte dozen, is zij ook naar den geest geëvolueerd: ze is een van haar ingangen kwijt en kan thans slechts nog *direct* geprikkeld worden. De zwarte dozen bestaan uit een *onwillekeurig* deel - net als de witte - en uit een *variabel* deel, dat den invloed van de witte uitgangsspanning bewerkstelligt.



Afbeelding 4: *De outstar in detail*

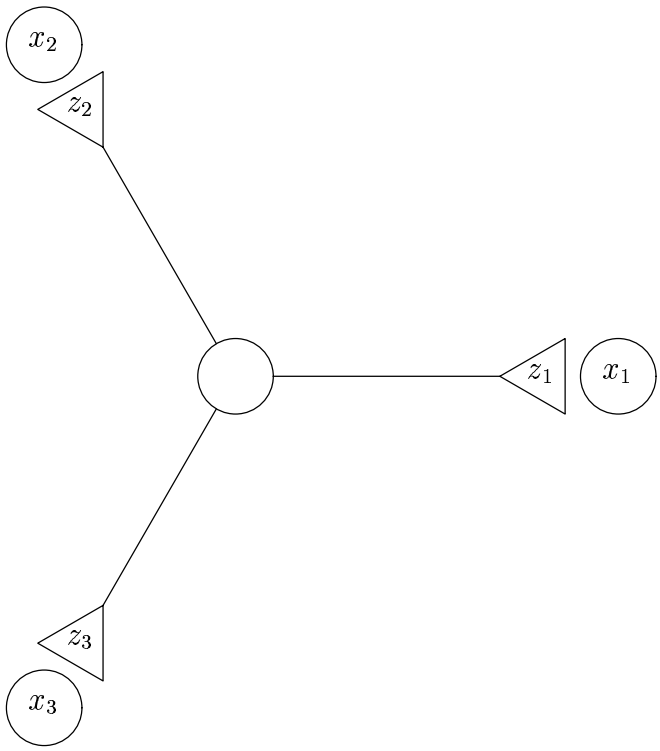
Een veranderde interne toestand van den outstar komt aan het licht, door aan te vangen den outstar een klinkende bel te verschaffen, en daarbij goed op zijn reactie te letten. Geruimen tijd later wordt het experiment gedaan: men presentere den outstar nog eens de bel, op tijd gevolgd door een homp vlees - waarna men den outstar enigen tijd gunne, om zichzelf te hervinden. Het zal nu spoedig duidelijk zijn, dat de outstar in aanwezigheid van een klinkende bel, zich nu anders gedraagt, dan voorheen.

Dat het karakter van deze gedragsaanpassing beperkend werke, laat zich rechtvaardigen, door de proef een aantal keer te herhalen: de outstar is dan *enkel en alleen nog* in staat tot kwijlen! -

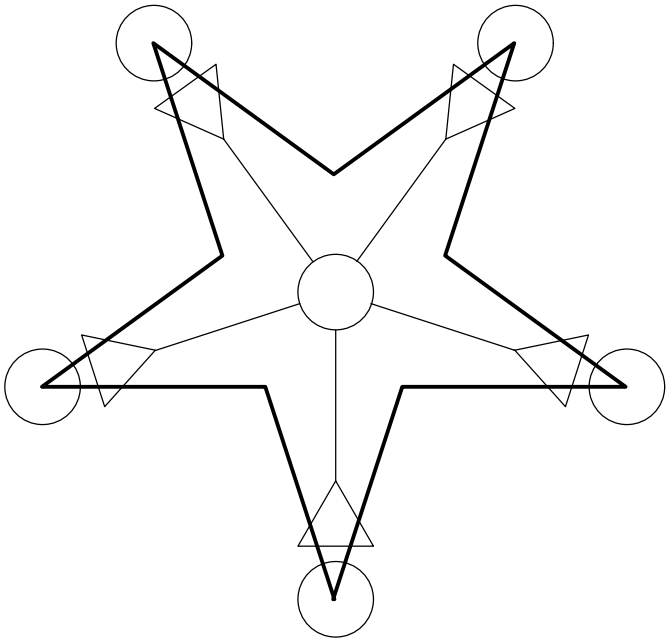
Aldus is het gedrag van den outstar interpreteerbaar, als dat van een sujet, in een conditioneringsexperiment[20].

De vorm, in welken de outstar doorgaans verschijnt, wordt in afbeelding 5 getoond; deze vorm verklare tevens den naam, welke het best tot zijn recht komt, bij een outstar met vijf gedragscomponenten.

[20]Te denken valt aan het sujet uit *a clockwork orange*



Afbeelding 5: *De gangbare vorm van een outstar met drie gedragscomponenten*



Afbeelding 6: *De gangbare vorm van een outstar met vijf gedragscomponenten*

2. Van een kwantitatieve benadering van den outstar

Het vorige hoofdstuk geeft een kwalitatieve behandeling van den outstar. Grossberg, van wien de outstar afkomstig is, heeft een aantal concrete regels, voor de communicatie tussen de verscheidene onderdelen van den outstar opgesteld. Met behulp van deze regels kan gekeken worden, onder welke omstandigheden de outstar te conditioneren valt.

In het vorige hoofdstuk wordt duidelijk, dat de gedragscomponenten uit twee delen bestaan. Grossberg noemt het deel, dat voor den invloed der witte uitgangsspanning zorgt en dat in afbeelding 5 als driehoek is getekend, een *Long Term Memory trace* (LTM). Het deel dat het gedrag veroorzaakt, in de afbeelding met cirkels aangegeven, noemt hij *Short Term Memory trace* (STM).

Grossberg zal hier worden gevolgd, wat betreft de namen, die hij voor LTM en STM gekozen heeft: resp. z en x; ook deze staan in de afbeelding.

LTM en STM zijn beide tijdsafhankelijk: x en z zijn derhalve functies van den tijd. Grossberg geeft de vergelijkingen (2.1) en (2.2), om hun gedrag in den tijd mee te beschrijven.

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot S(t) \cdot z(t) + C(t) \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = D \cdot S(t) \cdot x(t) + E \cdot z(t) \tag{2.2}$$

Voor het gemak wordt ervan uitgegaan, dat de letters A, B, D en E constanten zijn; natuurlijk kunnen ze ook met den tijd variëren, maar dat maakt voor het principe niks uit: als de situatie duidelijk is voor constanten, dan blijft dat zo, *ook* voor het geval, in welk ze variabel zijn.

De functie $x(t)$ beschrijft het gedrag van een STM: deze functie geeft het verloop der activatie van dit specifieke „neuron" in den tijd weer. Indien het niet geprikkeld wordt, zal zijn activatie naar den rusttoestand terugkeren: de A uit vergelijking (2.1) zij dus *negatief*[21].

De functie $z(t)$ staat voor een LTM: zij geeft het tijdsverloop der verbindingssterkte, van dit specifieke gedragsneuron met het witte neuron, weer. $S(t)$ is een functie van den tijd, van het signaal afkomstig van het witte neuron: dit is gelijk aan *nul*, indien het witte neuron niet geactiveerd is.

Het uitgangspunt zij *geen* òf een *positieve* verbinding tussen de gedragsneuronen en het witte. Bij een *positief* signaal afkomstig van wit, hoort ook een positieve constante B, zodat het signaal het gedragsneuron *positief* kan activeren. Bij geen verbinding ontstaat dan ook geen activatie van het

[21] Voor een positieve activatie van $x(t)$

gedragsneuron, bij een vuren van wit.

Op analoge wijze is te beredeneren, dat ook D *positief* moet wezen en E *negatief*.

Voorts rest slechts nog de functie $C(t)$: zij is de UCS.

De elektrische spanning op den uitgang van een gedragscomponent, is gelijk aan de activatie van dat specifieke gedragsneuron: het gedrag van den outstar is de verzameling van activaties der gedragsneuronen.

Wanneer *leert* een systeem: wanneer op verschillende tijdstippen, bij eenzelfden prikkel, *verschillend gedrag* ten opzichte van elkander aan den dag treedt.

Het is vergelijking (2.1) direct aan te zien, dat bij gelijke stimulering - dus op verschillende tijdstippen een zelfde waarde voor resp. C en S - het gedrag van den outstar *niet* verandert, indien de LTM's in den tijd constant zijn[22]: *leren* in den outstar hebbe dus plaats, indien z met den tijd meeveranderen kan.

Hiertoe dient vergelijking (2.2): zij beschrijft de verandering van $z(t)$ als functie van den tijd. Als het witte neuron vuurt, terwijl er tegelijkertijd al activatie bestaat in een specifiek gedragsneuron, zal de verbindingssterkte tussen deze neuronen toenemen.

En ziet: de outstar leert!

Voor het huidige moment moet nog één rotte appel uit de mand gehaald worden. Uitgaande van verbindingssterktes, die niet alle gelijk nul zijn en een kunstmatig constant gehouden activatie van het witte neuron, zullen de activaties van enkele gedragsneuronen, op den duur de pan uit rijzen, en dientengevolge ook hun verbindingssterkte met het witte neuron.

Om een dergelijk sneeuwbaleffect te voorkomen, wordt een maximale waarde voor de activatie vastgesteld, die ieder neuron hebben mag. In de praktijk, echter, zal dit niet nodig blijken, omdat toch niet *al te grote* tijdsintervallen onder de loep genomen zullen worden. Doch, dit impliceert wel, dat als juiste-conditioneringseis slechts gesteld behoeft te worden, dat de verhoudingen tussen de LTM's der verschillende gedragsneuronen, dezelfde moeten wezen, als de verhoudingen tussen de activaties, waaruit de UCS bestaat. Voor *twee* gedragsneuronen betekent dit, dat $\frac{z_1}{z_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

[22] Afgezien van verschillende begincondities: dit zijn de aanvankelijke activaties der zwarte neuronen

3. Inleiding

Aldus beschrijft Grossberg den outstar: „An outstar is the minimal network capable of associative pattern learning" (Stephen Grossberg, The Adaptive Brain I, p. 473, figure 5a).

Op pagina 464 van dat zelfde boek, definiëert hij een outstar aldus: „An outstar is thus a functional differential system of the form

$$\frac{d}{dt}x_i = Ax_i + Bz_i + C_i(t) \tag{37}$$

$$\frac{d}{dt}z_i = Dz_i + Ex_i \tag{38}$$

where A, B, D, and E are continuous functionals such that B and E are nonnegative." (Grossberg)[23].

De afzonderlijke x_i's kunnen worden voorgesteld, als gemiddelde activiteiten van bepaalde groepen neuronen, terwijl de afzonderlijke z_i's gemiddelde verbindingssterktes zijn tussen een aparte groep neuronen, zeg groep 0, en de al genoemde groepen.

Anders, kunnen afzonderlijke x_i's als enkele neuronen opgevat worden: x_3 is dan de gemiddelde activiteit van neuron nummer 3: in dit verband hebben Grossbergs functies $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$ en $E(t)$ volledig inzichtelijke betekenissen. De $C_i(t)$'s stellen een UCS voor.

Dit stelsel van differentiaalvergelijkingen, dat een outstar is, vormt het uitgangspunt van het gepresenteerde onderzoek. De functies x_i en z_i en hun afgeleiden, zijn alle functies van den tijd, t, en daarmee is het bovengenoemde stelsel, een stelsel van *gewone* differentiaalvergelijkingen: een ODE (= Ordinary Differential Equations) systeem.

Grossberg heeft laten zien, dat een dergelijk systeem in staat is, om een patroon te leren. Nauwkeuriger gezegd houdt dit het volgende in. Als op $t = 0$ de functies $x_i(t)$ en $z_i(t)$ willekeurige waarden hebben en $C_i(t)$ een, zeg vaste, invoerfunctie op het systeem is, dan gelde na verloop van enigen tijd, de volgende conditie: $(z_i - o_i)\|(C_i - o_i)$[24], waarbij z_i en C_i punten in een n-dimensionale ruimte voorstellen, ten opzichte van het coördinatenstelsel met den oorsprong o_i.

Bij een fysische verwezenlijking van den outstar, zal de informatieoverdracht tussen de verschillende onderdelen van het systeem, natuurlijk niet

[23] Grossberg vermeldt hier geen $S(t)$, maar neemt deze op, in de functies $B(t)$ en $E(t)$. Dat zal in dezen tekst verder ook het geval wezen

[24] $(z_i - o_i)\|(C_i - o_i) \leftrightarrow \frac{(z_i - o_i)(C_i - o_i)}{\sqrt{(z_j - o_j)(z_j - o_j)(C_k - o_k)(C_k - o_k)}} = 1$, d.w.z. de vectoren $z_i - o_i$ en $C_i - o_i$ hebben dezelfde richting: ziet aanhangsel A

met oneindige snelheid geschieden. Dit suggereert het toevoegen van vertragingen - delays - in Grossbergs vergelijkingen (37) en (38).

Waar zou dit dan moeten gebeuren?

Om te beginnen hangen de functies x_i en z_i in hun verandering van zichzelf af. Dit is geen informatieoverdracht van onderdeel naar onderdeel, dus komen die termen niet in aanmerking voor het toevoegen van een vertraging.

De functie C_i vertragen heeft ook weinig zin, omdat het systeem geen vergelijkingen bevat, waarin de verandering in C_i, direct of indirect, afhangt van zichzelf: een vertraging in C_i inbouwen, komt neer op een verschuiven der functie.

De enige twee termen, die nog overblijven, zijn die waarin $x_i'(t)$[25] afhangt van $z_i(t)$ en omgekeerd. Omdat z_i, als - zoals Grossberg dat noemt - Long Term Memory trace, in principe niet snel in den tijd verandert, komt *ook* deze term, *niet* in de eerste plaats in aanmerking, om een vertraging in te stoppen. De vertraging wordt dien term toegevoegd, waar het Short Term Memory trace - x_i - van invloed is, op de verandering van het LTM trace.

Een outstar met vertragingen is een DDE (= Delay Differential Equations) systeem. Met aangepaste namen voor de functies, ziet zo'n outstar er aldus uit - de $\tau(i)$'s, de vertragingen zijnde.

$$\frac{d}{dt}f_i(t) + p \cdot f_i(t) + q \cdot g_i(t) + c_i(t) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dt}g_i(t) + r \cdot f_i(t - \tau(i)) + s \cdot g_i(t) = 0 \tag{3.2}$$

Het gedrag van den outstar is uiteraard afhankelijk, van de parameterfuncties p, q, r en s en van de invoerfuncties c_i. Restricties op de parameters zijn, dat $p(t), s(t) > 0$[26] en $q(t), r(t) < 0$.

De hier te beschouwen gevallen, zijn die, in welke de parameterfuncties constant zijn.

Bij wijze van voorbeeld zou het volgende systeem een outstar kunnen zijn, omdat $p = s = 1$ (dus $p, s > 0$) en $q = -a$, $r = -\frac{2}{a}$, $a > 0$ (dus $q, r < 0$).

$$f'(t) + f(t) - a \cdot g(t) = 0 \tag{3.3}$$

[25] $x_i'(t) = \frac{d}{dt}x_i(t)$

[26] Hiermede zijn de veranderingen der functies f_i en g_i negatief afhankelijk van zichzelf. Grossberg noemt deze restricties niet, in de eerder aangehaalde definitie, terwijl hij *wel* expliciet zegt, dat B en E groter dan nul moeten zijn. Het is echter niet plausibel, dat LTM traces en STM traces in hun verandering positief afhankelijk van *zichzelf* zouden wezen, omdat een kleine activatie daarvan, onherroepelijk leidt, tot een exponentieel groeien van die activatie: dan zijn alle uitzichten op een goeden afloop ver te zoeken!

$$g'(t) - \frac{2}{a} \cdot f(t - \frac{\pi}{2}) + g(t) = 0 \tag{3.4}$$

Het verschil met een ODE systeem is, dat dit DDE systeem, een term met een vertraging van $\frac{\pi}{2}$ heeft.

Eenvoudig rekenwerk laat zien, dat een mogelijke oplossing voor dit stelsel van differentiaalvergelijkingen gegeven wordt, door: $f(t) = \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})$ en $g(t) = \frac{2}{a}\cos t$.

Het is duidelijk dat een outstar, die *dit* gedrag vertoont, nooit een patroon[27] kan leren, omdat de functies $f(t)$ en $g(t)$ niet naar een vaste waarde convergeren, maar eeuwig in beweging zijn.

Vanwege het feit, dat outstars zonder vertraging, nooit dit gedrag kunnen vertonen[28], levert een vertraging *extra* complicaties voor den outstar op, in zake het leren van patronen.

In het vervolg van dezen tekst, zullen de analyses en simulaties niet den term $c_i(t)$ uit vergelijking (3.1) bevatten: het systeem zal onder den invloed van een puls bestudeerd worden, aangeboden op $t = 0$: $c_i(t)$ verandert dan in een Dirac-delta-functie, welke weglaatbaar is, indien $f(t)$ een bepaalde startwaarde gegeven wordt.

4. Een analyse van het ODE systeem

Dit hoofdstuk neemt de oplossingen van het ODE systeem onder de loep en bekijkt, onder welke omstandigheden oscillaties optreden.

Veronderstelt dat het systeem

$$f'(t) + p \cdot f(t) + q \cdot g(t) = 0 \tag{4.1}$$

$$g'(t) + r \cdot f(t) + s \cdot g(t) = 0 \tag{4.2}$$

oplossingen $f(t) = N \cdot e^{\omega t}$ en $g(t) = M \cdot e^{\lambda t}$ heeft.

De afgeleiden van f en g kunnen in termen van zichzelf uitgedrukt worden: $f'(t) = \omega \cdot N \cdot e^{\omega t} = \omega \cdot f(t)$ en $g'(t) = \lambda \cdot g(t)$. Men vulle dit resultaat in bovenstaande vergelijkingen in en stelle deze aan elkander gelijk:

$$f(t) \cdot [\omega + p - r] = g(t) \cdot [\lambda + s - q] \tag{4.3}$$

[27] Men zou kunnen zeggen, dat het systeem hier een *oscillerend* patroon heeft geleerd (Mastebroek); bij den outstar is het echter de bedoeling, dat hij twee *vaste* patronen met elkander associëert: *deswege* gaat het leren hier mis

[28] cf. hoofdstuk 4

Deze vergelijking kan alleen voor alle t gelden, als $\lambda = \omega$ [29].

g(t) kan nu ook in termen van f(t) uitgedrukt en in (4.1)[30] ingevuld worden. Op deze manier wordt een product, van f(t) met een functie van ω, verkregen, dat nul moet wezen. Aangezien f(t) *nooit* nul is, gelde: $\omega(\omega + s - q) + p(\omega + s - q) + q(\omega + p - r) = 0$, mits $\omega \neq q - s$:

$$\omega^2 + (s + p)\omega + ps - qr = 0 \tag{4.4}$$

Dit is een tweeden graads vergelijking, die voor ω gemakkelijk oplost. De oplossingen zijn:

$$\omega = \frac{-(s+p) \pm \sqrt{(s-p)^2 + 4qr}}{2} \tag{4.5}$$

Het is nu duidelijk, dat, voor reële parameters p, q, r en s, er oscillerende oplossingen zijn, indien $(s - p)^2 + 4qr < 0$. Bij den onvertraagden outstar, c.q. $p, s > 0$ en $q, r < 0$, komt dit niet voor.

Voorts wordt bezien, welke de verhouding is, tussen de amplituden van $f(t)$ en $g(t)$, resp. N en M. Hiertoe wordt λ in (4.3) vervangen, door ω, waarna beide kanten der vergelijking door $g(t) \cdot [\omega + p - r]$ gedeeld worden:

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{N}{M} = \frac{\omega + s - q}{\omega + p - r} \tag{4.6}$$

Enige voorzichtigheid met de ω's van (4.5) zij wel geboden: men diene te contrôleren, of de functies $f(t)$ en $g(t)$, met desbetreffende ω, *inderdaad* aan het stelsel van differentiaalvergelijkingen voldoen. Ter contrôle worden de verkregen „oplossingen" in het stelsel ingevuld.

Ter toelichting een voorbeeld. Een systeem beschreven door (4.1) en (4.2), hebbe $p = 1$, $q = -2$, $r = -2$ en $s = 1$. Dit resulteert, krachtens (4.5), in twee reële waardige ω's: $\omega = 1$ of $\omega = -3$.

Men beschouwe $\omega = 1$. Ten eerste wordt met behulp van (4.6), de verhouding tussen N en M berekend: $\frac{N}{M} = \frac{\omega+s-q}{\omega+p-r} = \frac{1+1+2}{1+1+2} = 1$. Wordt $N = 1$

[29] Indien dit niet zo ware, geldt voor *constante* λ en ω: $\frac{N}{M} \cdot \frac{\omega+p-r}{\lambda+s-q} e^{\omega t} = e^{\lambda t} \rightarrow K e^{\omega t} = e^{\lambda t} \rightarrow e^{ln(K)} e^{\omega t} = e^{\lambda t} \rightarrow e^{\omega t + ln(K)} = e^{\lambda t} \rightarrow \omega t + ln(K) = \lambda t \rightarrow (\omega - \lambda)t = -ln(K) \rightarrow t = \frac{-ln(K)}{\omega - \lambda}$; omdat het rechterlid der laatste vergelijking constant is, geldt vergelijking (4.3), bij willekeurige λ en ω, voor slechts *één* waarde van t

[30] Uit (4.3) volgt $g(t) = \frac{\omega+p-r}{\omega+s-q} f(t)$; stoppe men dit in (4.1), dan: $f'(t) + p \cdot f(t) + q \cdot g(t) = \omega f + pf + q\frac{\omega+p-r}{\omega+s-q} f = [\omega + p + q\frac{\omega+p-r}{\omega+s-q}]f = 0$. De aldus verkregen vergelijking zij te vermenigvuldigen met $\omega + s - q$: $[\omega + s - q] \cdot [\omega + p + q\frac{\omega+p-r}{\omega+s-q}]f = [\omega[\omega + s - q] + p[\omega + s - q] + q[\omega + p - r]]f = [\omega^2 + [s - q]\omega + p\omega + ps - pq + q\omega + pq - rq]f = [\omega^2 + [s - q + p + q]\omega + ps - pq + pq - rq]f = [\omega^2 + [s + p]\omega + ps - rq]f = 0$

gekozen, dan zijn mogelijke oplossingen $f(t) = e^t = g(t)$. Daaruit volgt $\frac{df(t)}{dt} = \frac{dg(t)}{dt} = f(t)$. Invullen in (4.1) leidt tot $f + f - 2f = 0$, zoals het hoort en in (4.2) invullen, geeft hetzelfde resultaat. $\omega = 1$ levert dus oplossingen.

Men beschouwe $\omega = -3$. Een eerste probleem dient zich al aan, bij een poging, om de verhouding tussen N en M te berekenen: $\frac{N}{M} = \frac{-3+1+2}{-3+1+2} = \frac{0}{0}$. Delen door nul: een teken aan den wand! Echter, late men zich beter niet al te gauw uit het veld slaan. Getracht wordt nu, om met dezelfde verhouding als zoëven, het proces verder ten einde te voeren. Het in (4.1) invullen resulteert uiteindelijk in: $-3f + f - 2f = -4f$ en niet nul. Voor $\omega = -3$ bestaat derhalve geen oplossing.

Zonder berekeningen had men reeds kunnen vermoeden, dat $\omega = 1$ *wel* en $\omega = -3$ *niet*, een oplossing wezen kon. Dit heeft te maken met het feit, dat $p \cdot s < q \cdot r$, hetgeen een explosie van $f(t)$ en $g(t)$ suggereert. Het spreekt voor zich, dat e^{-3t} bij het voortschrijden van den tijd, niet explodeert. Hierop zal nog worden teruggekomen.

5. Een analyse van het DDE systeem

Nu de oplossingen van het ODE systeem gevonden zijn, verplaatse de aandacht zich naar het DDE systeem.

Overwogen wordt, of op een soort gelijke wijze, ook oplossingen van het DDE systeem gevonden kunnen worden. In navolging van het vorige hoofdstuk, zal getracht worden, om met oplossingen van het type $f(t) = Ne^{\omega t}$ en $g(t) = Me^{\omega t}$, de vergelijkingen voor den vertraagden outstar, te betreden.

$$f'(t) + p \cdot f(t) + q \cdot g(t) = 0 \tag{5.1}$$

$$g'(t) + r \cdot f(t - \tau) + s \cdot g(t) = 0 \tag{5.2}$$

Het vorige hoofdstuk toont, dat de afgeleiden van $f(t)$ en $g(t)$ in termen van die functies zelf, uitdrukbaar zijn. Dergelijks geldt ook voor $f(t - \tau)$: $f(t - \tau) = Ne^{\omega(t-\tau)} = Ne^{-\omega\tau}e^{\omega t}$. Door het gevonden resultaat in (5.2) in te vullen, wordt een stelsel van vergelijkingen verkregen, dat wel iets weg heeft van dat uit het vorige hoofdstuk. Doch hier verandert r in $re^{-\omega\tau}$. Dit neemt niet weg, dat de, bij den onvertraagden outstar gevonden, voor ω op te lossen, vergelijking (4.4), zonder meer overgenomen kan worden, mits men voor de metamorfose van r in $re^{-\omega\tau}$ zorg drage.

$$\omega^2 + (s + p)\omega + ps - qre^{-\omega\tau} = 0 \tag{5.3}$$

Dit is een vergelijking die met minder gemak op te lossen is, dan (4.4): een poging om de e-macht te kraken, met 't oog op de extractie van ω, verzandt jammerlijk, in een *door de* ln-*functie afgeschermde* ω en daarmede is men minstens even ver van huis.

Een alternatieve methode, die voor de hand ligt[31], is het vervangen der e-macht door een Taylorpolynoom. Pogingen, om polynomen van boven den tweeden graad op te lossen, vallen af te raden en zich beperken tot *maximaal* den tweeden graad, is voorzeker te onnauwkeurig.

Hoewel Taylors methode het probleem niet oplost, vermag ze toch, enige hulp te verlenen, bij *het zoeken* naar oplossingen.

In de eerste plaats, kunnen Taylorpolynomen bij de constructie van een computerprogramma, dat naar oplossingen voor (5.3) zoekt, van pas komen.

Ten tweede geeft de methode van Taylor een indruk van de grootte der oplossingsverzameling. Een n-den graads polynoom heeft hoogstens n nulpunten. De nauwkeurigheid, waarmede de e-macht door den Taylorpolynoom benaderd wordt, is afhankelijk van den graad van den polynoom: des te groter n, zoveel te groter de nauwkeurigheid. Dat betekent dat de oplossingsverzameling *oneindig* groot *zou kunnen* zijn[32]. -

Vervolgens wordt bezien, of er überhaupt een oplossing te vinden is. Omdat het vinden van een analytische oplossing, langs den gebruikelijken weg, een zeer lastig probleem is, zal het probleem - om te beginnen - van den numerieken kant benaderd worden: i.e. met den computer.

Het idee is simpel: er worden wat verschillende waarden voor ω in (5.3) ingevuld, om te bepalen of dit 0 oplevert, c.q. er een oplossing gevonden is. Het *willekeurig* kiezen van mogelijke oplossingen lijkt - met 't oog op den tijd

[31] Die overigens in haar meest algemenen vorm, voorbestemd zij, om uitsluitend in teleurstellingen te resulteren

[32] Het is wellicht verleidelijk om te menen, dat de oplossingsverzameling *ten hoogste drie* oplossingen hebben kan: men noeme het linker lid van (5.3) bijvoorbeeld $\psi(\omega)$ en differentiëre deze functie twee keer: $\psi''(\omega) = 2 - \tau^2 qre^{-\omega\tau}$. Het nulpunt van déze functie is wèl gemakkelijk te vinden: $\omega_0 = \frac{-1}{\tau} ln(\frac{2}{\tau^2 qr})$.

Voor $\omega \to -\infty$ gelde er: $\psi'(\omega) > 0$. Haar afgeleide is *monotoon stijgend* en voor alle $\omega < \omega_0$ is $\psi''(\omega) < 0$. Dus zal $\psi'(\omega)$ aanvankelijk dalen en *wellicht* voor een $\omega_1 < \omega_0$ door nul gaan. Vanaf ω_0 zal $\psi'(\omega)$ alleen nog maar stijgen, en, omdat $\psi'(\omega_0) < 0$ nog een keer door nul gaan.

$\psi'(\omega)$ heeft hoogstens *twee* nulpunten.

Ten slotte gelde er voor $\omega \to -\infty$: $\psi(\omega) < 0$. Men herhale bovenstaand proces voor ψ en zorge, dat zij zo vaak mogelijk door nul gaat: er zijn maximaal *drie* nulpunten te vinden.

Deze redenering klopt, als $\omega \in \mathbb{R}$. Is echter $\omega \in \mathbb{C}$ - noodzakelijk voor oscillaties - dan heeft $\psi''(\omega)$ meer dan één oplossing, er zijn oplossingen voor alle gehele k: $\omega_k = \frac{-1}{\tau} ln(\frac{2}{\tau^2 qr}) + 2\pi ki$. Er zijn dus *oneindig* veel!

- een kansloze strategie: er zal *bewust in de juiste richting* gegokt moeten worden.

Hiertoe wordt een Taylorpolynoom $\mathfrak{P}(\omega)$ van den tweeden graad van de e-macht uit (5.3) - $\phi(\omega)$ genaamd: $\phi(\omega) = e^{-\omega\tau}$ - rond een algemeen punt, zeg λ, in het complexe[33] vlak geconstrueerd. Deze ziet eruit als in (5.4)[34].

$$(5.4) \qquad \mathfrak{P}(\omega) = (1 + \tau\lambda + \tfrac{\tau^2}{2}\lambda^2)e^{-\lambda\tau} - (\tau + \tau^2\lambda)e^{-\lambda\tau}\omega + \tfrac{\tau^2}{2}e^{-\lambda\tau}\omega^2$$

Substitutie in (5.3) resulteert in de tweeden graads vergelijking (5.5).

$$(5.5)\ (1-\tfrac{qr\tau^2e^{-\lambda\tau}}{2})\omega^2+(s+p+qr(\tau+\tau^2\lambda)e^{-\lambda\tau})\omega+sp-qr(1+\tau\lambda+\tfrac{\tau^2}{2}\lambda^2)e^{-\lambda\tau} = 0$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn bij benadering ook oplossingen van (5.3), omdat (5.4) bij benadering de e-macht uit (5.3) voorstelt. De oplossingen van (5.5) worden beter, naar mate de Taylorpolynoom dichter bij een oplossing van (5.3) is ontwikkeld.

Aldus onstaat het plan voor een computerprogramma, dat een of meer oplossingen voor (5.3) zoekt. Met behulp van de abc-formule worden de expliciet gegeven oplossingen van (5.5) geïmplementeerd. Het algorithme begint met het kiezen van een waarde, om welke het den Taylorpolynoom ontwikkelt: bij gebrek aan informatie, geschiedt deze keuze op willekeurige basis.

Men drage het algorithme op, bij $\lambda = 0$ te beginnen. De oplossingen van (5.5) worden dan voor deze waarde bepaald. Een dezer, wordt, voor ω, in (5.3) ingevuld, om te zien of daar - bij benadering - 0 uitkomt. Men moet dus van te voren nog een bepaalde foutenmarge aangeven, binnen welke een gevonden oplossing als oplossing te accepteren zij. Ligt de uitkomst *verder* van 0, dan de foutenmarge, zo worde het proces herhaald, maar nu met een nieuwe λ: de net gecontrôleerde oplossing van (5.5)[35].

---

[33] Voor een toelichting bij complexe getallen worde men naar aanhangsel C verwezen

[34] Een Taylorpolynoom van den tweeden graad van $\phi(\omega)$ rond het punt $\omega = \lambda$ is een $\mathfrak{P}(\omega)$ waarvoor geldt dat: $\mathfrak{P}(\lambda) = \phi(\lambda)$, $\mathfrak{P}'(\lambda) = \phi'(\lambda)$, $\mathfrak{P}''(\lambda) = \phi''(\lambda)$. De polynoom $\mathfrak{P}(\omega) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\phi^{(k)}(\lambda)}{k!}(\omega - \lambda)^k$ voldoet hieraan: ter contrôle differentiëre men $\mathfrak{P}(\omega)$.

Differentiëren van $\phi(\omega) = e^{-\omega\tau}$ levert: $\phi'(\omega) = -\tau e^{-\omega\tau} = -\tau\phi(\omega)$ en $\phi''(\omega) = \tau^2 e^{-\omega\tau} = \tau^2\phi(\omega)$. Nu kan $\mathfrak{P}(\omega)$ expliciet uitgeschreven worden: $\mathfrak{P}(\omega) = \phi(\lambda) + \phi'(\lambda)[\omega - \lambda] + \frac{\phi''(\lambda)}{2}[\omega-\lambda]^2 = \phi(\lambda) - \phi(\lambda)\tau[\omega-\lambda] + \phi(\lambda)\frac{\tau^2}{2}[\omega-\lambda]^2 = \phi(\lambda)[1-\tau[\omega-\lambda]+\frac{\tau^2}{2}[\omega^2-2\lambda\omega+\lambda^2]] = \phi(\lambda)[1-\tau\omega+\tau\lambda+\frac{\tau^2}{2}\omega^2-\tau^2\lambda\omega+\frac{\tau^2}{2}\lambda^2] = \phi(\lambda)[1+\tau\lambda+\frac{\tau^2}{2}\lambda^2-[\tau+\tau^2\lambda]\omega+\frac{\tau^2}{2}\omega^2]$

[35] Voorbeeld: Stap I) Kies $\lambda = 0$ in (5.5). Stap II) Bereken m.b.v. de abc-formule de twee oplossingen ω_1 en ω_2 van (5.5). Stap III) Kies één der oplossingen als oplossing om te testen, zeg $\omega = \omega_1$. Stap IV) Vul dit in (5.3) in en bepaal de uitkomst: ligt deze dichter bij 0 dan de foutenmarge? Ja: einde algorithme; Nee: Stap V) Neem $\lambda = \omega_1$ in (5.5) en

Genoemd proces herhale zich, totdat de fout van de gevonden oplossing binnen de foutenmarge ligt[36].

De outstar brengt echter een aantal beperkingen met zich mede, dat er in de praktijk op neer komt, dat er maar één oplossing is. Hoe is dan, uit een eventueel oneindig grote verzameling, *die* ω te kiezen, die oplossing van den outstar is?

Dit is een lastig probleem! Helaas restte mij niet de tijd, om dit uit te vinden. Vragen, die in dit kader nog gesteld zouden moeten worden, zijn: „hoe is de gehele oplossingsverzameling te verkrijgen?", „zijn alle oplossingen van het veronderstelde type - een e-macht?", en de zonet gestelde vraag, „hoe, uit de gehele oplossingsverzameling, de outstaroplossing te distilleren?"

Zoals wel vaker, zijn ook hier de wegen die naar Rome leiden, talrijk. De, in dit hoofdstuk, gepresenteerde manier - een herschrijven van een DDE naar een ODE - suggereert, dat het proces misschien omkeerbaar is: er zal worden getracht, om een ODE systeem - waarvan de outstaroplossing bekend is - te transformeren naar een DDE systeem, in den hoop, dat de oplossing van den outstar meetransformere.

6. Van ODE naar DDE

Vanwege den eenvoud van het ODE systeem, zal worden geprobeerd, om het DDE systeem van dezen kant af te naderen. De vergelijkingen uit hoofdstuk 4, die dit systeem omschrijven, zijn in (6.1) en (6.2) herhaald.

$$f'(t) + p \cdot f(t) + q \cdot g(t) = 0 \tag{6.1}$$

$$g'(t) + r \cdot f(t) + s \cdot g(t) = 0 \tag{6.2}$$

Dit systeem wordt een weinig uitgebreid, opdat de parameter r ieder willekeurig complex[37] getal voorstelle: $r = Re^{i\theta}$, met $R > 0$. Op de overige

keer naar stap II terug

[36]Bij praktische uitvoering dezer methode, schuilt er een adder onder het gras. Dit zit 'm in het feit, dat (5.5) twee oplossingen heeft, zeg O_1 en O_2. Wil men dichter in de buurt van O_1 komen, zo neme men *deze*, als λ ter herhaling van het proces. Blindelings contrôleren van de nieuwe O_1, kan tot teleurstellende resultaten leiden: de fout kan somtijds hoger liggen, dan den eersten keer. Dit is niet te wijten aan een van tijd tot tijd falen der methode: de e-macht is nu rond een ander punt ontwikkeld, hetgeen een verwisseling der volgorde, waarin de oplossingen van (5.5) bekend worden, te weeg brengen kan. De eis, dat de fout altijd kleiner moet wezen, dan den vorigen keer, vermag een teleurstelling in de kiem te smoren. Daartoe diene men een gevonden fout te bewaren

[37]Voor een toelichting bij complexe getallen: cf. aanhangsel C. Hier zij vermeld, dat $i^2 = -1$ en dat $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *argument* van r heet

parameters blijven de outstarcondities van toepassing.

Slaat acht op $r = 1r = \frac{e^{-\omega\tau}}{e^{-\omega\tau}}r$: men wende de substitutie op (6.2) aan, om aldus tot (6.3) te geraken.

$$g'(t) + \frac{Re^{i\theta}}{e^{-\omega\tau}} \cdot e^{-\omega\tau} f(t) + s \cdot g(t) = 0 \tag{6.3}$$

De oplossingen van het ODE systeem zijn, voor $f(t)$, van het type $f(t) = Ne^{\omega t}$, zodat $f(t-\tau) = Ne^{\omega(t-\tau)} = e^{-\omega\tau}Ne^{\omega t} = e^{-\omega\tau}f(t)$. Aldus transformeert (6.3) tot (6.4).

$$g'(t) + \frac{Re^{i\theta}}{e^{-\omega\tau}} \cdot f(t-\tau) + s \cdot g(t) = 0 \tag{6.4}$$

De hoop, om een DDE systeem te vinden, van welk oplossingen bekend zijn, omdat een overeenkomend ODE systeem bekend is, is geen ijdele gebleken: de oplossingen van den onvertraagden outstar, beschreven door (6.1) en (6.2), zijn tevens oplossingen van den vertraagden outstar met één aangepasten parameter - $c = \frac{Re^{i\theta}}{e^{-\omega\tau}}$ - gegeven door (6.1) en (6.4).

Wat is de betekenis hiervan voor een vertraagden outstar? - En bestaat er een mogelijkheid, om *alle* outstars met een vertraging in een corresponderend ODE systeem te veranderen, ten einde de oplossingen daarvan te bemachtigen?

De vertraagde outstar wordt nu door de vergelijkingen (6.5) en (6.6) beschreven.

$$f'(t) + p \cdot f(t) + q \cdot g(t) = 0 \tag{6.5}$$

$$g'(t) + c \cdot f(t-\tau) + s \cdot g(t) = 0 \tag{6.6}$$

Voor de parameters geldt $p, s > 0$ en $q, c < 0$, met $c = Re^{i\theta+\omega\tau}$. Voorts wordt ω in haar reële en imaginaire deel opgesplitst: $\omega = \alpha + i\beta$, met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, en wordt c door (6.7) gegeven.

$$c = Re^{\alpha\tau} \cdot e^{i(\theta+\beta\tau)} \tag{6.7}$$

Nu moet τ zo gekozen worden, dat $e^{i(\theta+\beta\tau)} = -1$, omdat $Re^{\alpha\tau} > 0$. Dus

$$\theta + \beta\tau = \pi + 2k\pi \tag{6.8}$$

voor alle gehele k zodat $\tau \geq 0$.

Kan men nu voor alle combinaties van $c < 0$ en $\tau > 0$ ten minste één

oplossing vinden? Met een beetje geluk[38] is dat dan ook meteen de oplossing voor den vertraagden outstar.

Het liefst drukt ω zich uit, in de vijf parameters p, q, c, s en τ. Op het eerste gezicht is het erg verleidelijk, om de uitdrukking voor c[39] te nemen en voor ω op te lossen: $\omega = \frac{1}{\tau} ln(\frac{c}{r})$. Naar believen kan men dan verschillende waarden voor c, r en τ invullen, resulterend in de meest exotische waarden voor ω: die, zij het soms correct, meestal zeer teleurstellend zijn.

Dit is gemakkelijk in te zien, mits men zich bedenke, dat ω, in den aanvang, berekend was, met behulp van de parameters p, q, r en s: hun constante karakter voorkomt variaties in ω, ongeacht het lot, dat c en τ beschoren is.

Een soort gelijk probleem doet zich voor, als men vergelijking (4.4) probeert in te vullen, in $\omega^2 = \frac{1}{\tau^2} ln^2(\frac{c}{r})$[40], om aldus ook de rest der parameters een rol te laten spelen, in de vergelijking voor ω. De fout zit 'm hier in het feit, dat $\omega^2 = -(s+p)\omega + qr - sp$ [41] niet altijd correct is: ω^2 is *zelf* afhankelijk van ω en *deswege* mag een der parameters p, q, r of s, *niet* meer vrij worden gekozen.

Er is hier waarschijnlijk op de moeilijkheden, die ook rond vergelijking (5.3) bestonden, gestoten. Het correct transformeren van alles, om te trachten ω in *onafhankelijke* parameters uit te drukken, leidt vermoedelijk tot (5.3).

Het enige praktische proces is hier: ω uitrekenen met behulp van de vrij gekozen[42] parameters p, q, r en s. Nu kan men nog een vijfden parameter τ kiezen en c staat vast; dit is dus ook om te draaien: $\tau = \frac{1}{\omega} ln(\frac{c}{r})$.

7. Van het gedrag van stelsels differentiaalvergelijkingen

Omdat het nog niet gelukt is, om een analytische oplossing voor het DDE systeem *in het algemeen*, te vinden, zal worden geprobeerd, om met behulp van simulaties op een rekentuig, een indruk te krijgen, hoe het systeem zich in een aantal onbeschreven gevallen gedraagt. Dit kan bijdragen tot een beter begrip van het systeem en eventueel suggesties voor verder onderzoek opleveren.

Om te beginnen wordt het gedrag van een ODE systeem gesimuleerd, waarvan het gedrag ook met behulp van de vergelijkingen uit hoofdstuk 4 voorspelbaar is - om het correct functioneren der simulatieprogramma's te bevestigen.

---

[38] En dat hoeft lang niet in alle gevallen een ijdele hoop te wezen

[39] $c = re^{\omega\tau}$; immers $r = Re^{i\theta}$ en $e^{\omega t} = \frac{1}{e^{-\omega t}}$

[40] Kwadrateren van $\omega = \frac{1}{\tau} ln(\frac{c}{r})$

[41] cf. (4.4): men hale ω^2 naar rechts en vermenigvuldige de vergelijking met -1

[42] d.w.z. onafhankelijke

In het systeem - beschreven in de vergelijkingen (4.1) en (4.2) - is voor de volgende parameterwaarden gekozen: $p = 6$; $q = -3$; $r = -2$; $s = 1$. Dit is een systeem waarvoor geldt, dat $ps = qr$, hetgeen erop wijst, dat het systeem noch explodeert, noch uitdooft.

Nadat het systeem den initiëlen puls gekregen heeft, zullen $f(t)$ en $g(t)$ naar vaste waarden, ongelijk aan nul, convergeren. Men zou het zich kunnen voorstellen, door het systeem een soort „energy conserving property" toe te dichten, dat ervoor zorgt, dat er geen energie verloren gaat: hooguit vinde een andere verdeling over $f(t)$ en $g(t)$ plaats.

Omdat $f(t)$ en $g(t)$ naar een vaste waarde convergeren, kunnen oplossingen van het type $f(t) = N$ en $g(t) = M$ verwacht worden. De „energie" zal dan *zo* verdeeld worden, dat $\frac{N}{M}$ te allen tijde constant blijve. Deze verhouding kan middels vergelijking (4.6) verkregen worden. De ω, die in (4.6) voorkomt, dient met vergelijking (4.5) berekend te worden.

Hoewel uit deze beschouwing op te maken valt, dat $\omega = 0$, zal voor de volledigheid ω *toch* met behulp van (4.5) bepaald worden. Dit levert $\omega = -7$ of $\omega = 0$: men merke op, dat hier voor $\omega = 0$ moet worden gekozen, enkel wegens het feit, dat bekend is, dat het systeem niet uitdooft[43] en *niet*, omdat $\omega = -7$ in vergelijking (4.6) een deling door nul veroorzaakt, zoals dat bij de foutieve ω, uit het voorbeeld van hoofdstuk 3, *wel* het geval was.

De toepassing van $\omega = 0$ en de parameters op (4.6), toont, dat $f(t)$ zich tot $g(t)$ verhoudt, zoals 1 zich tot 2 verhoudt.

Er zijn drie simulaties uitgevoerd met deze parameterwaarden, een tijdstap van 0.01 en een totalen simulatietijd van 7.0[44].

De eerste simulatie werd met de begincondities $f(0) = 1.0$ en $g(0) = 0.0$ verricht. De, door het programma geplotte, functies zien er, na een kortstondige herverdeling der „energie", inderdaad constant uit. De waarden, die het programma oplevert, zijn: $f(7) = 0.143$ en $g(7) = 0.286$. Inderdaad blijkt $\frac{f(7)}{g(7)} = \frac{1}{2}$.

De tweede simulatie verschilt van de vorige, slechts met betrekking tot de begincondities: $f(0) = 1.0$ en $g(0) = 1.0$. Hier valt dezelfde verhouding van $f(t)$ tot $g(t)$ te verwachten, terwijl deze naar hogere waarden convergeren, omdat het systeem *bij aanvang* reeds meer „energie" bevat. Ook bij deze simulatie zagen de geplotte functies er constant uit: ze convergeerden naar, ongeveer, de volgende waarden: $f(7) = 0.571$ en $g(7) = 1.14$. Opgemerkt zij, dat de verhouding van $f(t)$ tot $g(t)$ *weer* een half bedraagt.

[43] De relatie $ps = qr$, waaruit dat op te maken valt, geldt natuurlijk *niet* voor een vertraagden outstar, casu quo r door c vervangen wordt. Dit komt, omdat zelfde oplossingen moeten gelden voor het DDE systeem als voor het ODE systeem, terwijl de parameters - cf. (6.7) - r en c van elkander verschillen

[44] cf. aanhangsel D voor het gebruikte programma

Kieze men de begincondities *zo*, dat de verhouding van $f(t)$ tot $g(t)$, bij den aanvang al een half bedraagt, *dan* is te verwachten, dat er niks gebeurt met $f(t)$ en $g(t)$ in den loop van den tijd. Het systeem bevindt zich al in evenwicht. Dit werd in de derde simulatie getest. De begincondities bedroegen $f(0) = 1.0$ en $g(0) = 2.0$. Er gebeurde niks.

De parameters van het zoëven beschreven systeem, voldoen aan de reeds gegeven outstarvoorwaarden: namelijk dat $p, s > 0$ en dat $q, r < 0$. Doch, het is geen mooi systeem, omdat men gaarne zou willen, dat $f(t)$ en $g(t)$ in den tijd naar nul gaan, mits geen invloed van buiten op het systeem inwerke, gelijk neuronen naar hun rustpotentiaal terugkeren en verbindingen tussen hen verdwijnen, indien deze niet worden onderhouden. Dit zou een motivatie kunnen wezen, om den parameters verdere beperkingen op te leggen, zodat het systeem *altijd* uitdooft.

Dat $ps > qr$ aan de reeds bestaande restricties toegevoegd worde!

Een voorbeeld van een onvertraagden outstar, die aan dezen nieuwen eis voldoet, zij beschreven door het stelsel (4.1) en (4.2), c.q. $p = 3$; $q = -2$; $r = -1$; $s = 1$.

Dit stelsel levert een probleem op, dat al in een anderen context ontmoet werd. Poogt men nl. om met behulp van (4.5) de oplossing te berekenen, dan is het resultaat: $\omega = -2 - \sqrt{3}$ of $\omega = -2 + \sqrt{3}$. Hier zijn beide even waarschijnlijk[45], omdat beide het gewenste uitdovende systeem beschrijven. Op een deling door nul, bij het uitrekenen der verhouding van $f(t)$ tot $g(t)$, zij ook al niet te rekenen, omdat alle parameters *geheel* zijn, terwijl de ω's *irrationeel* zijn.

Hoe kan nu de juiste oplossing gevonden worden? Bestaan er mogelijk *verscheidene* gevallen, in welke de ene en anders de andere geldig is? Zo ja, welke zijn dan de discriminerende factoren?

Vooralsnog zal het simulatieprogramma uitsluitsel moeten bieden. In alle geteste gevallen, is $\omega = -2 + \sqrt{3}$, de oplossing, met als bijbehorende verhouding $\frac{f}{g} = 0.732$ - *zelfs* bij een beginconditie, waarin de verhouding *exact* gelijk aan de verhouding der andere oplossing gesteld is. Het heeft er veel van weg, als ware er überhaupt maar één oplossing! -

De aandacht verplaatse zich naar den vertraagden outstar. Eerst wordt de bewering uit hoofdstuk 6[46] aan een kleinen test onderworpen.

Uitgangspunt vormt het net genoemde ODE systeem met $p = 3$, $q = -2$, $r = -1$, $s = 1$, waarvan inmiddels bekend is, dat de oplossing $\omega = -2 + \sqrt{3}$

[45] Gezien de kennis, die voorhanden is

[46] Te weten, dat de oplossing van een ODE systeem *ook* de oplossing is, van een DDE systeem met een aangepasten parameter

is en de bijbehorende verhouding $\frac{f}{g} = 0.732$.

Vergelijking (6.7) schrijft voor: $c = -e^{(-2+\sqrt{3})\cdot\tau}$. De beperkingen waaraan - nog te kiezen - τ onderhevig is, heten, dat $\tau > 0$ en τ enkel voor gehele k aan vergelijking (6.8) moet voldoen. Omdat ω reëel is, gelde $\beta = 0$[47] en valt τ uit de vergelijking. Iedere vertraging zou de ODE oplossing dus moeten leveren. Dit wordt door de simulaties[48] bevestigd.

8. Conclusies en aanbevelingen voor verder onderzoek

Een vertraagde outstar kan oscillerend gedrag vertonen[49]: *mitsdien* zij met extra moeilijkheden te rekenen - als het gaat om het leren van patronen - vergeleken met een outstar, die deze vertraging *niet* heeft. De doelstelling van dit onderzoek was, om te bezien, *hoe* bepaald kon worden - hetzij daarmede aan te vangen, aldus een basis creërend ten behoeve van vervolg onderzoek - onder welke omstandigheden deze oscillaties optreden en welke gevolgen dit voor het conditioneren van den outstar hebbe.

Uit analytisch oogpunt, is een willekeurig stelsel van differentiaalvergelijkingen met een vertraging, vrij lastig op te lossen, omdat men te maken krijgt met vergelijking (5.3), die, zoals besproken, moeilijk te behandelen is. Het is echter niet *al te* moeilijk, om een algorithme te ontwikkelen, dat ten minste één der mogelijke oplossingen van (5.3) bepaalt, met *in principe* iedere gewenste nauwkeurigheid. Deze nauwkeurigheid wordt slechts door het aantal, voor een *double*[50], gereserveerde bits begrensd. In hoofdstuk 5 is getoond, hoe men een dergelijk algorithme make.

Voorts kon in hoofdstuk 6 worden aanschouwd, dat er DDE systemen bestaan, die aan ODE systemen gelijke oplossingen bezitten. Deze worden middels het wijzigen van een der parameters, van het onvertraagde systeem, verkregen. Dit baart hoop, want een ODE systeem zij *eenvoudig* analyseerbaar!

De vraag rijst nu, *welk deel* der vertraagde outstars behandelbaar is, indien men alle mogelijke combinaties van ODE systemen „bij langs gaat". De vertraagde outstar heeft een onafhankelijken parameter (τ) extra. Dit wekt den indruk, dat *niet alle* vertraagde outstars onderworpen zijn.

Men stelle zich ieder systeem voor, als één punt in een ruimte: aldus heeft de *vertraagde* ruimte één dimensie meer, dan de *vertragingsloze* ruimte

[47] cf. (6.8)

[48] Voor het, bij de simulaties gebruikte, programma wordt naar aanhangsel E verwezen

[49] cf. (3.3) en (3.4)

[50] Uiteraard kan men *eigen* getallen met een grotere nauwkeurigheid implementeren

heeft - doch de beperkingen op parameter r[51] zijn per definitie *minder* sterk, dan de restricties van toepassing op c[52], omdat het gebruikte ODE systeem *zelf*, geen outstar zij, maar slechts een hulpmiddel bij het oplossen van een DDE systeem - welk een beschrijving van den vertraagden outstar geeft.

Bovendien was het in den aanvang, voornamelijk om oscillerende oplossingen te doen, die, krachtens de overwegingen van hoofdstuk 4, met de bedoelde beperkingen *niet* in het ODE systeem te verkrijgen zijn.

Men neme voor den parameter r in ieder geval alle reële getallen in acht. Daarnaast kan ook $r \in \mathbb{C}$ toegelaten worden, zodat het ODE systeem er een dimensie bij krijgt en de vertragingsloze ruimte evenveel dimensies als de vertraagde ruimte heeft.

Indien de afbeelding van ODE op DDE strikt één op één is, zouden alle vertraagde outstars, ieder aan de hand van een geschikt ODE systeem, probleemloos kunnen worden bestudeerd. Mogelijk ligt hier een interessant punt voor toekomstig onderzoek verborgen.

Verondersteld, dat iedere vertraagde outstar *inderdaad* via een geschikt ODE systeem bestudeerd kan worden, dan is er nog wel iets, dat *evengoed* nog roet in het eten gooien kan.

Dat valt te zien, als vergelijking (4.6) nog eens onder de loep genomen wordt. In het geschikte ODE systeem wordt r *zo* gekozen, dat er oscillerende oplossingen ontstaan: ω is complex en wellicht r ook. Vermoedelijk leidt dit doorgaans tot een *complexe* verhouding van $f(t)$ tot $g(t)$. Het is de vraag, wat daarmee aan te vangen zij.

Omdat deze oplossing door den vertraagden outstar overgenomen wordt, krijgt deze complexwaardige STM of LTM sporen. Daarentegen, zal een vertraagde outstar in de praktijk, altijd een reëelwaardige oplossing bezitten. Betekent dit, dat niet in alle gevallen een geschikt ODE systeem te vinden is?

Een bevestiging hierop, is in tegenspraak met den eis, dat het geschikte systeem *wel* bestaat, i.e. dat de afbeelding van ODE op DDE strikt één op één zij. In ieder geval kan bekeken worden, in welken mate (4.6) inderdaad tot complexe verhoudingen leidt: mogelijk leidt dit ook tot uitsluitsel, inzake de één op één relatie.

Ten slotte nog een opmerking van algemenen aard, over het al dan niet stabiel kunnen leren van patronen, door den vertraagden outstar. Er is sprake van stabiliteit, indien de verhoudingen, tussen de activiteiten der cellen in den buitensten ring, constant zijn.

Complicaties treden voorzeker aan den dag, als iedere cel met haar *eigen*

[51] cf. (6.2)
[52] cf. (6.6)

frequentie oscilleert. Doch, hoe zou men het geval, in welk de frequenties van den ring *gelijk* aan elkander zijn, dienen te interpreteren? -

9. Intermezzo

$$\frac{d}{dt}e^t = e^t = - - 1 \cdot e^t = -e^{-i\pi} \cdot e^t = -e^{t-i\pi}$$

$$\forall \kappa \in \mathbb{Z} : \frac{d}{dt}f(t) = f(t) = -f(t - i\pi - 2\kappa\pi) = -f(t - \pi[i + 2\kappa])$$

$$-f(t - \pi[i + 2\kappa]) = f(t) = -f(t - \pi[\frac{1}{i} + 2\kappa])$$

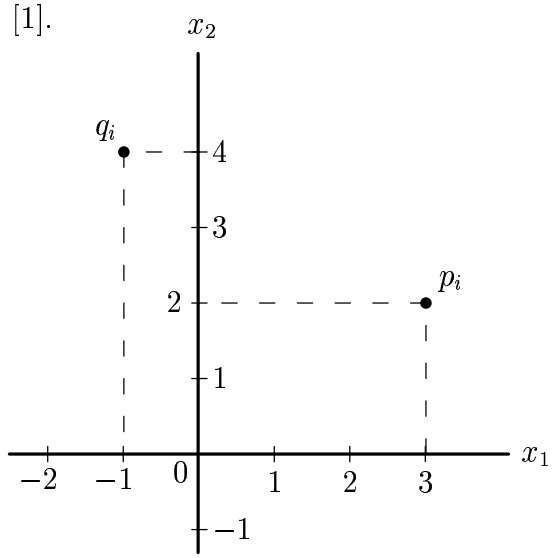
AANHANGSELS

A. Van analytische meetkunde

Ter opheldering der meetkunde en matrixalgebra in den tekst. Een goede inleiding tot het gebied der analytische meetkunde vinde men in [4].

I. Van het carthesisch coördinatenstelsel en translaties

Het idee dat een getal gebruikt kan worden, om een punt op een lijn te localiseren, was reeds den ouden Grieken bekend; Descartes breidde dit concept in 1637 uit, door twee getallen te gebruiken voor het vastleggen van punten in een vlak [1].



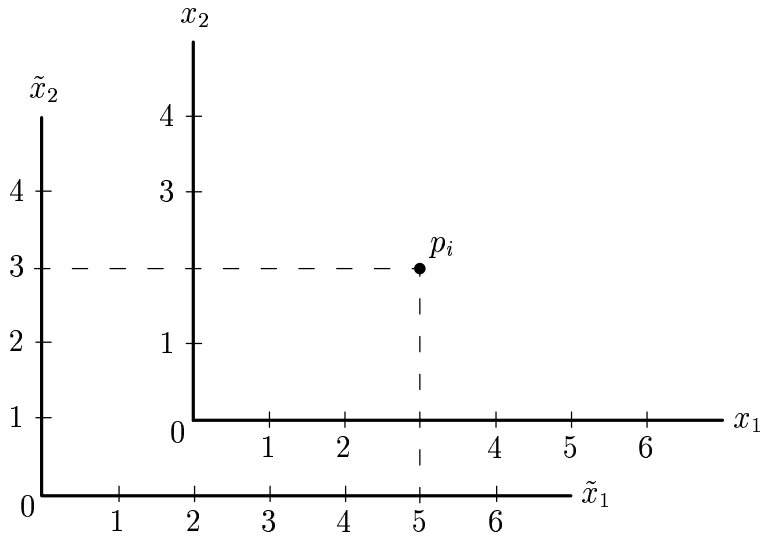
Afbeelding 7: *Een carthesisch coördinatenstelsel, relatief waaraan punt* $p_i = (3, 2)$ *en punt* $q_i = (-1, 4)$

Het coördinatenstelsel in afbeelding 7 hete x_i: de coördinaatassen worden met de letter x aangeduidt, terwijl de afzonderlijke assen met behulp van een nummer van elkaar onderscheiden worden. Dit nummer schrijve men in den vorm van een *kleinen index rechts onderaan de letter* x: het stelsel in afbeelding 7 heeft x_1 en x_2 als assen.

Men geve den naam van een punt weer, met een kleine latijnse letter - met uitzondering van de letters voor de indices en de x - met rechts onderaan één index; voor de indices gebruike men symbolen uit de verzameling $\{i, j, k, l, m, n, o\}$. De index voegt niks aan de identiteit van een punt toe: er geldt bijvoorbeeld $p_i = p_k$, de punten p_i en p_k zijn *een en hetzelfde.*

Door den index door 1 of 2 te vervangen, wordt per definitie resp. de x_1- of de x_2-coördinaat verkregen: $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $q_1 = -1$, $q_2 = 4$. In het algemeen gelde $p_i = (p_1, p_2)$.

Het punt met de coördinaten $(0,0)$ relatief aan het stelsel x_i, hete den oorsprong van x_i en is op het snijpunt der coördinaatassen gelegen.



Afbeelding 8: *Een translatie van het coördinatenstelsel: de oorsprong van $\tilde{x}_i$ is $(-2,-1)$ ten opzichte van den oorsprong van x_i verschoven: $\tilde{x}_i = x_i + (2,1)$ transformeert puntcoördinaten t.o.v. x_i, naar die, relatief aan het stelsel $\tilde{x}_i$; $\tilde{p}_i = p_i + (2,1) = (3,2) + (2,1) = (3+2, 2+1) = (5,3)$: een punt met coördinaten $(3,2)$ relatief aan x_i heeft relatief aan $\tilde{x}_i$ $(5,3)$ als coördinaten*

De keuze van het coördinatenstelsel - in principe de keuze van een punt, dat als oorsprong diene, en een richting en oriëntatie[53] voor een der coördinaatassen - is willekeurig en natuurlijk zijn de coördinaten van een punt afhankelijk van deze specifieke keuze.

In de meetkunde streeft men naar het vinden van *algemeen geldende* uitspraken; hiermee worden uitspraken over meetkundige grootheden bedoeld, die op een of andere manier *onafhankelijk*, van de specifieke keuze van het coördinatenstelsel zijn. Dergelijke grootheden heten **invariant** onder een beweging van het stelsel.

De puntcoördinaten zijn duidelijk *niet* invariant, hetgeen afbeelding 8 licht valt af te zien.

Om te bepalen *wat* invariant is, zal datgene vaak vanuit verschillende stelsels bekeken worden, om te kunnen zien hoe 't zich gedraagt, als men van perspectief verandere. Aan de basis van iedere meetkundige grootheid

[53]De oriëntatie bepale aan welken kant van den oorsprong de positieve getallen liggen: in afbeelding 8 is de x_1-as bijvoorbeeld *rechts georiënteerd*

staat het punt: het gedrag der grootheid, bij een beweging van het stelsel, is daarom steeds herleidbaar uit het gedrag der afzonderlijke punten.

Den mensen zij nu een **transformatie** gegeven. Ze is een algebraïsche zin, die, gegeven de coördinaten van punten in een bepaald stelsel, vertelt wat de coördinaten der desbetreffende punten in een ander stelsel zijn: ze transformeert, als het ware, het oorspronkelijke stelsel in een nieuw stelsel.

De meest algemene beweging is een **rotatie**, gevolgd door een **translatie**. Voor het moment worde hier enkel een translatie beschouwd. *Zij* is de meest *eenvoudige* beweging van een coördinatenstelsel: een lijnrechte beweging van den oorsprong, in deze of gene richting.

Afbeelding 8 toont hiervan een voorbeeld; om verwarring tussen de stelsels te voorkomen, draagt het nieuwe stelsel een tilde, waarmee zijn naam $\tilde{x}_i$ is.

Als de oorsprong van het nieuwe stelsel, in het oude stelsel de coördinaten b_i heeft, dan transormeren de nieuwe puntcoördinaten volgens (A.1) naar de oude terug.

$$x_i = \tilde{x}_i + b_i \tag{A.1}$$

Hieruit laat zich onmiddelijk de omgekeerde transformatie, die de oude naar de nieuwe puntcoördinaten transformere, bepalen.

$$\tilde{x}_i = x_i - b_i \tag{A.2}$$

In afbeelding 8 heeft de oorsprong van $\tilde{x}_i$ de coördinaten $b_i = (-2, -1)$ in het oude stelsel. Oude coördinaten laten zich middels (A.2) naar de nieuwe transformeren: $\tilde{x}_i = x_i - b_i = x_i - (-2, -1) = x_i + (2, 1)$.

II. Van hoeken

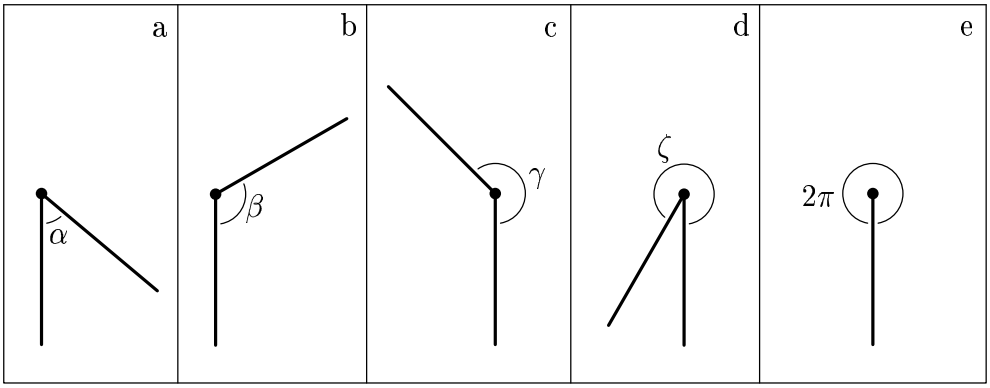
Men geve den hoeken een naam uit de verzameling der *kleine griekse letters*, met uitzondering van $\{\delta, \varepsilon, \pi\}$. De laatste uit deze uitzonderlijke verzameling, π, is de naam voor een bijzonderen hoek en waarmede in den gehelen tekst *een en dezelfde* hoek bedoeld is, ook indien zij deel van een algebraïschen zin is.

De grootte van een hoek gedraagt zich in zekeren zin als een reëel getal: dit komt tot uitdrukking in den naam van den hoek. Laat α, β, η, θ, hoeken wezen, zodat $\eta = \alpha + \beta$ en $\theta = 3\alpha$. Er zij dan bedoeld, dat de grootte van den hoek η gelijk aan de grootte van α, vermeerderd met die van β, is; tevens dat θ drie maal de grootte van α heeft.

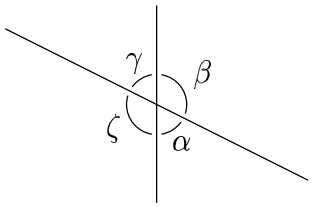
Een hoek is een maat voor de richting en oriëntatie van een lijn, relatief aan een andere lijn. In plaats van „lijn" mag ook „halve lijn" of „lijnstuk"

gelezen worden.

Afbeelding 9 illustreert den stand van zaken, waarbij de uitgangssituatie bestaat, uit twee over elkander heen liggende halve lijnen, tussen welke in dien toestand geen hoek bestaat. De hoek wordt langzaam groter gemaakt. De naam π zij gereserveerd, voor *dien* hoek, zodat beide halve lijnen eens te meer gelijk gericht, maar nu *met tegenovergestelde oriëntatie*[54], zijn: in dergelijken toestand vormen de twee te zamen een gehele lijn!



Afbeelding 9: *Twee halve lijnen met een zelfde beginpunt; rond dat punt worde de ene van de andere afgedraaid, totdat de uitgangssituatie weer bereikt zij. De uitspraken „geen hoek", „een hoek ter grootte nul", „een hoek ter grootte 2π", zijn alle drie equivalent aan elkaar. Opgemerkt zij dat in deze afbeelding $\alpha < \beta < \pi < \gamma < \zeta$ geldt*



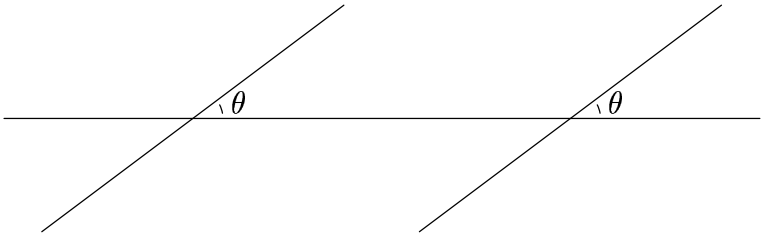
Afbeelding 10: *Opgemerkt zij:* $(\alpha + \beta = \pi) \rightarrow (\beta = \pi - \alpha)$ *en voorts* $(\pi = \beta + \gamma = \pi - \alpha + \gamma) \rightarrow (\pi - \pi = -\alpha + \gamma) \rightarrow (0 = -\alpha + \gamma) \rightarrow (\alpha = \gamma)$. *Op overeenkomstige wijze tone men aan, dat* $\beta = \zeta$

Als twee lijnen elkander snijden, ontstaat een viertal hoeken, die twee aan twee tegenover elkaar staan: een hoek staat tegenover *dien* hoek, aan welken hij *niet grenst*. Afbeelding 10 belicht, dat een hoek en zijn opponent even

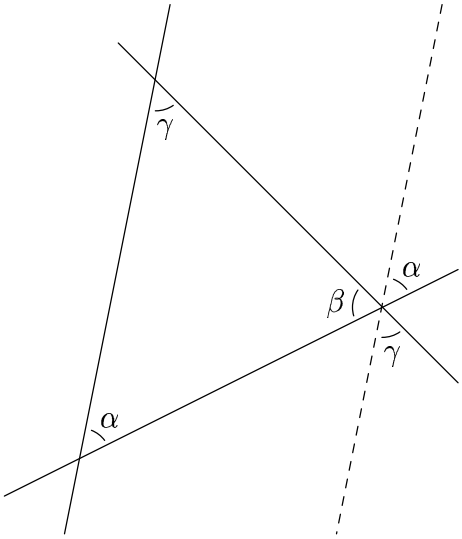
[54]Een halve lijn oriëntere zich van haar beginpunt af

groot zijn. Een paar snijdende lijnen levert twee verschillende hoeken: de kleinste der twee zij - „*de* hoek tussen die twee lijnen".

Indien twee lijnen mekaar *niet snijden*, dan heten ze *evenwijdig*. Per definitie noeme men den hoek tussen een paar parallelle lijnen *nul*: als één uit het paar, een hoek θ met een derde lijn make, dan heet de hoek, van de andere met de derde, ook θ. -



Afbeelding 11: *De schuine lijnen lopen parallel*

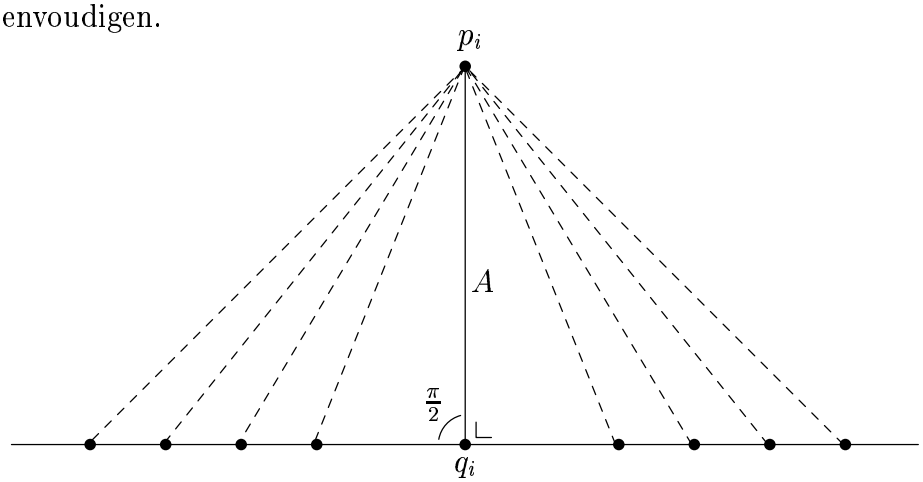


Afbeelding 12: *De drie hoeken van een driehoek tellen op tot* π

III. Van rechthoeken en rechthoekige driehoeken

Aan de naamgevingsrichtlijnen voor punten en hoeken, wordt hier nu toegevoegd, dat een *latijnse hoofdletter*, een *lengte* betekene. Met de lengte van een lijnstuk - het stukje lijn dat tussen twee, op een lijn gelegen, punten ligt - wordt de afstand tussen de terminale punten daarvan bedoeld. Het laat zich raden, wat er met dezen afstand bedoeld is.

Minder vanzelfsprekend is, wanneer het om den afstand, van een punt *tot een lijn* gaat: hier vermag de lengte van het lijnstuk, het betoog te vereenvoudigen.



Afbeelding 13: *De afstand van een punt tot een lijn, is de lengte A van dàt lijnstuk, dat loodrecht op de lijn staat: het enige lijnstuk dat slechts één hoek met de lijn in hun snijpunt maakt. Een rechte hoek is een hoek ter grootte $\frac{\pi}{2}$; dezen hoek kan men op normale wijze, maar ook op de andere getoonde manier, in een tekening aangeven*

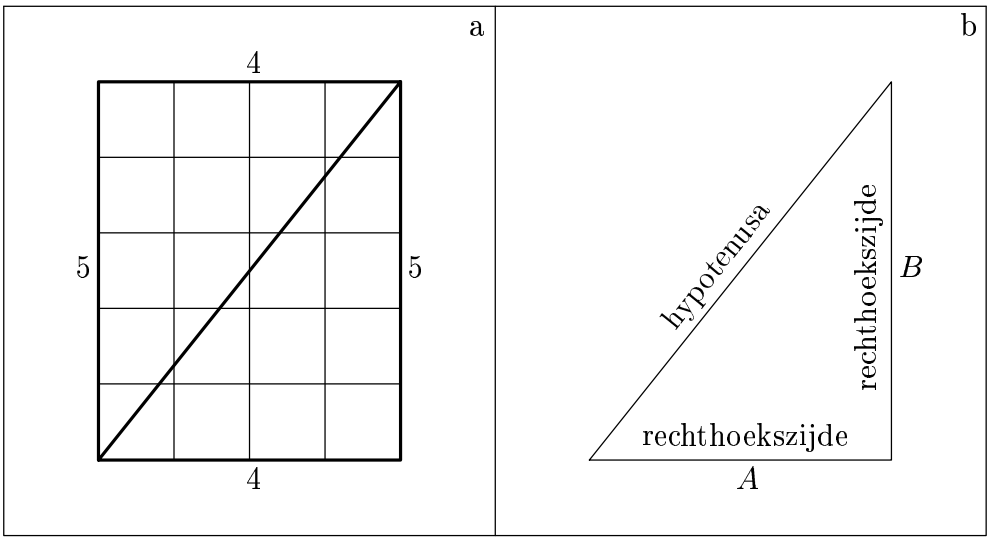
In den vorigen paragraaf is vastgesteld, dat een paar snijdende lijnen twee verschillende hoeken levert: hier beschouwe men het uitzonderlijke geval, in welk de twee bedoelde hoeken even groot zijn. Met andere woorden, indien ϱ de naam van ieder dezer hoeken is, dan $2\varrho = \pi$ en $\varrho = \frac{\pi}{2}$ en is een andere naam voor dezen hoek „rechte hoek".

Er zij, nu, een lijn en een punt p_i, dat *niet* op de lijn ligt - dan kunnen er met behulp van p_i en een willekeurig punt op de lijn, lijnstukken worden gecreëerd. Voor den afstand van p_i tot de lijn, neme men de lengte van het lijnstuk, dat loodrecht op de lijn staat.

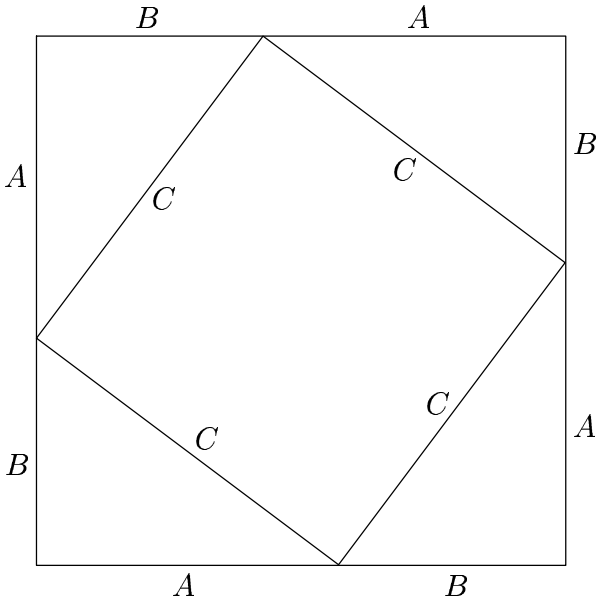
Spoedig zal blijken, dat dit ook het lijnstuk met de *kortste* lengte is. -

Afbeelding 14 laat een rechthoek en een rechthoekigen driehoek zien: een *rechthoek* zij een vierhoek met vier rechte hoeken en een *rechthoekige driehoek* zij er een, met een rechten hoek. De twee driehoekszijden, die aan den rechten hoek liggen, heten de rechthoekszijden, terwijl de derde **hypotenusa** genoemd wordt.

Voor een rechthoek laat zich gemakkelijk een oppervlakte, die met de intuïtie overeenstemt, definiëren: ze is het product van twee loodrecht op elkander staande zijden van den rechthoek.



Afbeelding 14: a) *Een rechthoek met zijden ter lengte* 4 *en* 5*, heeft een oppervlakte van* $4 \cdot 5 = 20$*: de helft hiervan is de oppervlakte van een rechthoekigen driehoek met rechthoekszijden ter lengte* 4 *en* 5; b) *Een rechthoekige driehoek met oppervlakte* $\frac{1}{2}AB$



Afbeelding 15: *De stelling van Pythagoras: de oppervlakte van een der driehoeken is* $\frac{1}{2}AB$*, dus die van alle vier* $2AB$*; de oppervlakte van het grote vierkant is* $(A+B)^2 = A^2+B^2+2AB$*; de oppervlakte van het kleine vierkant is* C^2*, of, die van het grote min die der vier driehoeken; men concludere hieruit, dat* $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB - 2AB = A^2 + B^2$

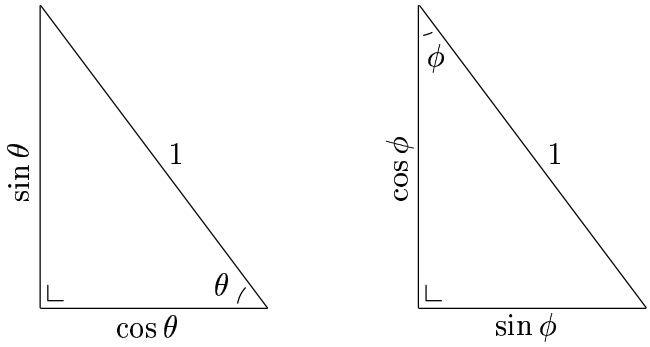
De stelling van Pythagoras, waarbij afbeelding 15 een toelichting biedt, is zeer waardevol, ten einde de lengte van een der driehoekszijden aan een rechthoekigen driehoek te bepalen, mits men de lengten der andere twee zijden reeds kent. Dit geldt in het bijzonder voor de hypotenusa.

Voorbeeld:
Dat de rechthoekszijden van een driehoek resp. de lengten 3 en 4 hebben: de lengte der hypotenusa worde $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Voorbeeld:
Dat de rechthoekszijden van een driehoek resp. de lengten 5 en 12 hebben: de lengte der hypotenusa worde $\sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$.

Pythagoras vertelt ons tevens, dat, c.q. afbeelding 13, het *loodrechte* lijnstuk korter is, dan de andere lijnstukken aldaar. -

Rechthoekige driehoeken met een hypotenusa ter lengte 1, kennen speciale namen voor hun rechthoekszijden: ze drukken een verband van een zijde met een niet rechten hoek uit.

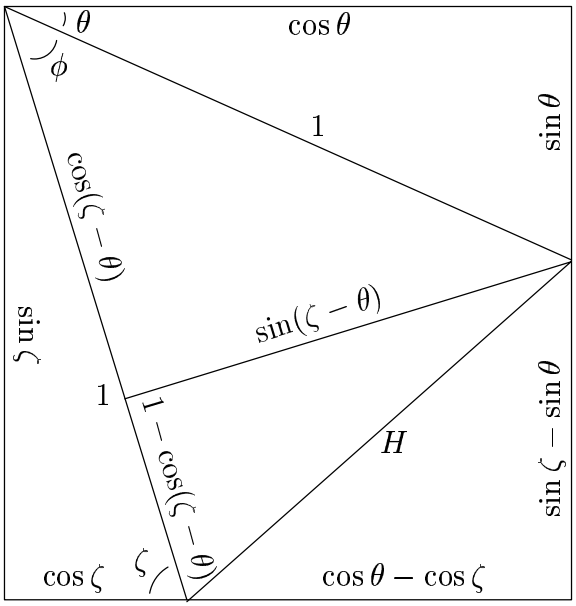


Afbeelding 16: *Aan een rechthoekigen driehoek, met hypotenusa ter lengte* 1 *en hoek* θ*, hete de, aan den hoek liggende, zijde „de cosinus van* θ*", en hete de andere rechthoekszijde „de sinus van* θ*"*

De vorige paragraaf eindigt met de waarneming, dat de drie hoeken van een driehoek, tot π sommeren: mitsdien resulteert het samennemen der twee *niet* rechte hoeken, van den rechthoekigen driehoek, in een rechten hoek!

Voor den driehoek uit afbeelding 16, betekent dit $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$ en verder bijvoorbeeld $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$. Er zal $\cos\theta = \sin\phi = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ wezen, i.e. zijde „$\cos\theta$" mag ook „$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$" genoemd worden.

Het zal den lezer niet verbazen, dat ook Pythagoras nog iets wenst op te merken, in zake deze nomenclatuur - aldus den paragraaf beëindigend.



Afbeelding 17: *De rechte hoek linksboven bestaat uit drie delen:* θ, ϕ, $\frac{\pi}{2} - \zeta$, *daarom* $\zeta = \theta + \phi$, *of ook* $\phi = \zeta - \theta$

De afgebeelde rechthoek is opgebouwd, uit een aantal driehoeken, waarvan drie rechthoekige met een hypotenusa ter lengte 1. Twee van hen hebben een rechthoekszijde, die tevens zijde van den rechthoek is, te weten $\sin\zeta$ en $\cos\theta$.

Om alvast een resultaat klaar te hebben, dat aanstonds nodig zal blijken en bovendien van algemeen belang is, zal de stelling van Pythagoras op een dezer driehoeken losgelaten worden: cf. vergelijking (A.3).

$$\cos^2\zeta + \sin^2\zeta = 1^2 = 1 \tag{A.3}$$

Voorts zijn twee rechthoekige driehoeken te herkennen, die beide een hypotenusa met een lengte H hebben: men drukke H uit in termen van de hoeken θ en ζ, door twee keer de stelling van Pythagoras toe te passen, op elken driehoek een keer.

Eerst worden de kwadraten der rechthoekszijden van den ondersten driehoek bepaald.

$$(\cos\theta - \cos\zeta)^2 = \cos^2\theta + \cos^2\zeta - 2\cos\theta\cos\zeta \tag{A.4}$$

$$(\sin\zeta - \sin\theta)^2 = \sin^2\theta + \sin^2\zeta - 2\sin\theta\sin\zeta \tag{A.5}$$

Pythagoras wil nu, dat de som dezer twee, het kwadraat van H weerspiegelt.

Met het oog op (A.3) zij opgemerkt, dat $\cos^2\zeta + \sin^2\zeta = 1$ en $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ en dat $1 + 1 = 2$.

$$H^2 = 2 - 2 \cdot [\cos\theta\cos\zeta + \sin\theta\sin\zeta] \tag{A.6}$$

Nu voor den tweeden driehoek: ter voorbereiding op de toepassing van Pythagoras, worden eerst de kwadraten der rechthoekszijden weer apart uitgewerkt.

$$\sin^2(\zeta - \theta) \tag{A.7}$$

$$[1 - \cos(\zeta - \theta)]^2 = 1 + \cos^2(\zeta - \theta) - 2\cos(\zeta - \theta) \tag{A.8}$$

$$H^2 = 2 - 2\cos(\zeta - \theta) \tag{A.9}$$

Het naast elkaar leggen der vergelijkingen (A.6) en (A.9) levert (A.10): hieruit zijn vele eigenschappen van cosinus en sinus te herleiden. Waarlijk, een beeldschoon resultaat! -

$$\cos(\zeta - \theta) = \cos\theta\cos\zeta + \sin\theta\sin\zeta \tag{A.10}$$

IV. Van de syntaxis van tensoralgebra

De cirkel is bijna rond: het is tijd, om heem te keren! De materialen voor het aanleggen van het fondament, waarop de meetkunde een stevige basis kan vinden, zijn bijna compleet. Voor den laatsten keer wordt de nomenclatuur noemenswaardig uitgebreid.

Deze paragraaf zal een licht doen schijnen op de syntaxis der tensoralgebra. Een syntaxis houdt zich met de uiterlijkheden van een taal bezig, maar om toch iets van het abstracte karakter weg te nemen, alvorens de volgende paragraaf de semantiek der tensoralgebra zal laten schitteren, volge eerst een *voorlopige* definitie van het begrip **tensor**, waarbij teruggegrepen wordt op begrippen uit den eersten paragraaf.

Een *tensor* zij een grootheid, die *invariant* onder *translaties* is, en wier eenheid zich in een kleine groep getallen - een matrix - uitdrukt, afhankelijk van het zgn. *niveau* van den tensor.

Met uitzondering van het voorbeeld in den volgenden zin, zal het nog even in het midden blijven, van welke grootheden hier *precies* gesproken wordt. Een praktische toepassing van den tensor, verscheen in den vorigen

paragraaf, onder den naam *lengte*, ten tonele: later wordt getoond, *waarom* dit een tensor van het nulde niveau is.

Een latijnse hoofdletter - uitgezonderd een, die in den vorm van *kleine* letter als index in gebruik is - met, afhankelijk van het niveau van den tensor, *geen*, *één*, of *meer* indices, stelle den naam van een tensor voor. Twee „standaard" tensoren hebben een ander uiterlijk: δ_{ij} en ε_{ijk}. Laatst genoemde zal in dezen tekst verder niet meer worden genoemd, omdat ε_{ijk} alleen in de *drie-dimensionale* meetkunde toepassingen vinde.

Het *aantal indices*, nu, dat in den naam van een tensor verschijne, komt met het *niveau* van den tensor overeen. Tensoren van het nulde, eerste, tweede niveau zijn resp. A, B_i, C_{ij}. Hier zullen geen tensoren van een hoger niveau gebruikt worden.

Een tensor van het N$^{\underline{o}}$ niveau drukke zich middels 2^N *geordende* getallen uit. Een tensor van niveau nul drukt zich derhalve slechts in één getal uit. Bij een tensor van een hoger niveau noemt men een der getallen, waarin hij zich uitdrukke, een *coördinaat* van dien tensor.

Net als bij punten, leidt 't invullen der indices door 1 of 2, tot de namen der afzonderlijke coördinaten van den tensor. Om te zien, *hoe* tensoren zich middels getallen uitdrukken, moge nu een voorbeeld voor het eerste en voor het tweede niveau volgen.

$$B_i = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

De indices zorgen voor de ordening der coördinaten: C_{11} staat bijvoorbeeld altijd linksboven en C_{12} ernaast.

Tensoren tellen eenvoudig op: men telle slechts tensoren van een zelfde niveau bij elkaar en enkel coördinaten van gelijke positie. Het resultaat is een tensor van onveranderd niveau. Een voorbeeld.

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

Voor het vermenigvuldigen - dit kan ook met tensoren van verschillend niveau - onderscheide men twee typen: het *algemeenproduct* en het *inproduct*, dat eigenlijk een som van producten is.

Het *algemeenproduct* kenmerkt zich, doordat de namen der tensoren, die *in het product* gaan, *geen gelijke* indices bevatten. Het resultaat van dit product, is een tensor van een niveau, dat de som is, van de niveaus der

tensoren die vermenigvuldigd werden.

$$H_{ijklm} = F_{ij}G_{klm} \tag{A.14}$$

Iedere afzonderlijke coördinaat is te vinden, door de indices aan beide kanten van de vergelijking, in te vullen.

$$H_{12211} = F_{12}G_{211} \tag{A.15}$$

$$C_{ij} = A_iB_j = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\times 9 & 7\times 3 \\ 4\times 9 & 4\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 21 \\ 36 & 12 \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

Het *inproduct* kenmerkt zich, doordat er *wel gelijke* indices voorkomen, bij de tensoren die „vermenigvuldigd" worden: deze *gelijke indices* worden *weggesommeerd*. De uitkomst is een tensor, wiens niveau gelijk is aan de overgebleven indices.

Bij een inproduct van twee niveau één tensoren, kunnen er geen verschillende indices wezen en op dien grond is de oplossing een niveau nul tensor.

$$S = A_iB_i = A_1B_1 + A_2B_2 \tag{A.17}$$

$$F_iG_i = F_1G_1 + F_2G_2 = 43 = 7+36 = 7\times 1+6\times 6 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

$$T_{ij}A_j = T_{i1}A_1 + T_{i2}A_2 = \begin{pmatrix} T_{11}A_1 + T_{12}A_2 \\ T_{21}A_1 + T_{22}A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

Het inproduct van een *paar niveau twee* tensoren kan als resultaat een *niveau twee* tensor of een *niveau nul* tensor hebben. Er zijn in deze omstandigheid een aantal verschillende inproducten, afhankelijk van de plaats, die de gelijke indices ten opzichte van elkaar innemen; een paar voorbeelden: $A_{ij}B_{ij}$, $A_{ij}B_{ji}$, $A_{ij}B_{kj}$, $A_{ij}B_{jk}$.

Enkel het laatste wordt veel gebruikt en mitsdien zij $A_{ij}B_{jk}$ *het* inproduct van A_{ij} met B_{ij}. Indien, in dezen tekst, een der andere inproducten gebruikt worde, zullen deze „alternatief inproduct" worden genoemd.

Een tweetal voorbeelden van het „normale" inproduct van een paar niveau twee tensoren.

$$C_{ik} = A_{ij}B_{jk} = A_{i1}B_{1k} + A_{i2}B_{2k} \tag{A.20}$$

$$E_{ij}T_{jk} = E_{i1}T_{1k} + E_{i2}T_{2k} = \begin{pmatrix} E_{11}T_{11} + E_{12}T_{21} & E_{11}T_{12} + E_{12}T_{22} \\ E_{21}T_{11} + E_{22}T_{21} & E_{21}T_{12} + E_{22}T_{22} \end{pmatrix} \tag{A.21}$$

Alle, voor dezen tekst van belang zijnde, rekenoperaties met tensoren zijn nu uit de doeken gedaan. Wat betreft de naamgeving van tensoren moet nog gezegd worden, dat een *niveau nul tensor* ook wel **scalar** genoemd wordt en dat een andere naam voor een *niveau één tensor*, **vector** is.

Met het oog op het feit, dat in dezen tekst geen tensoren van een hoger niveau dan twee gebruikt zijn, zal de naam **tensor**, zonder dat een niveau genoemd wordt, verwijzen naar een van het tweede niveau.

Omdat het inproduct van twee tensoren, weer een tensor levert, laat zich *machtsverheffen* voor tensoren definiëren: om te beginnen voor natuurlijke getallen u.

$$T_{ik}^{u+1} = T_{ij}^{u} T_{jk} \tag{A.22}$$

Voor het getal 0 kan men $\delta_{ij} = T_{ij}^{0}$ *zo* kiezen, dat het inproduct hiervan met een tensor, dien tensor zelf teruggeeft.

$$T_{ik} = \delta_{ij} T_{jk} = \delta_{i1} T_{1k} + \delta_{i2} T_{2k} \tag{A.23}$$

$$T_{11} = \delta_{11} T_{11} + \delta_{12} T_{21} = 1 \cdot T_{11} + 0 \cdot T_{21} \tag{A.24a}$$
$$T_{12} = \delta_{11} T_{12} + \delta_{12} T_{22} = 1 \cdot T_{12} + 0 \cdot T_{22} \tag{A.24b}$$
$$T_{21} = \delta_{21} T_{11} + \delta_{22} T_{21} = 0 \cdot T_{11} + 1 \cdot T_{21} \tag{A.24c}$$
$$T_{22} = \delta_{21} T_{12} + \delta_{22} T_{22} = 0 \cdot T_{12} + 1 \cdot T_{22} \tag{A.24d}$$

Hiermee zijn de coördinaten van den δ_{ij}-tensor, die ook „kronecker-delta" geheten wordt, bepaald.

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.25}$$

Een tweede „standaard" tensor, die in den volgenden paragraaf gebruikt zal worden, is de V_{ij}-tensor.

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.26}$$

In drie stappen laat zich de vierde macht hiervan bepalen.

$$V_{ik}^{2} = V_{ij} V_{jk} = V_{i1} V_{1k} + V_{i2} V_{2k} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned} V_{il}^{3} &= V_{i1} V_{1k} V_{kl} + V_{i2} V_{2k} V_{kl} \\ &= V_{i1} V_{11} V_{1l} + V_{i1} V_{12} V_{2l} + V_{i2} V_{21} V_{1l} + V_{i2} V_{22} V_{2l} \end{aligned} \tag{A.28}$$

$$
\begin{aligned}
&= V_{i1}V_{12}V_{2l} + V_{i2}V_{21}V_{1l} \\
&= -V_{i1}V_{2l} + V_{i2}V_{1l}
\end{aligned}
$$

(A.29)
$$
\begin{aligned}
V^4_{im} &= -V_{i1}V_{2l}V_{lm} + V_{i2}V_{1l}V_{lm} \\
&= -V_{i1}V_{21}V_{1m} - V_{i1}V_{22}V_{2m} + V_{i2}V_{11}V_{1m} + V_{i2}V_{12}V_{2m} \\
&= -V_{i1}V_{21}V_{1m} + V_{i2}V_{12}V_{2m} \\
&= -V_{i1}V_{1m} - V_{i2}V_{2m}
\end{aligned}
$$

Door de indices in te vullen, worde men gewaar dat V^4_{ij} en de kronecker-delta gelijk zijn.

(A.30)
$$V^4_{ij} = \delta_{ij}$$

Tot besluit van dezen paragraaf wordt er nog op gewezen, dat bij een inproduct van een willekeurigen tensor met den δ_{ij}-tensor, in den willekeurigen tensor slechts een index van naam wijzigt. Vergelijking (A.31) toont dit voor een inproduct van δ_{ij} met een vector.

(A.31)
$$\delta_{ij}A_j = \begin{pmatrix} \delta_{11}A_1 + \delta_{12}A_2 \\ \delta_{21}A_1 + \delta_{22}A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 \\ 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = A_i$$

Evenzo geldt $\delta_{ij}A_i = A_j$.

V. Van de semantiek van tensoralgebra

De vorige paragraaf gaf een voorlopige definitie van den tensor, deze is hier voor het gemak herhaald.

Een *tensor* zij een grootheid, die *invariant* onder *translaties* is, en wier eenheid zich in een kleine groep getallen - een matrix - uitdrukt, afhankelijk van het zgn. *niveau* van den tensor.

De transformaties voor een translatie werden door (A.1) en (A.2) gegeven: hier als (A.32) en (A.33) herhaald.

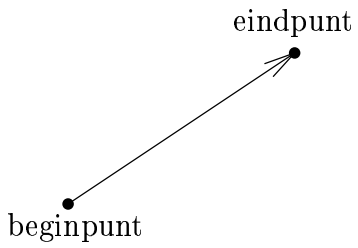
(A.32)
$$x_i = \tilde{x}_i + b_i$$

(A.33)
$$\tilde{x}_i = x_i - b_i$$

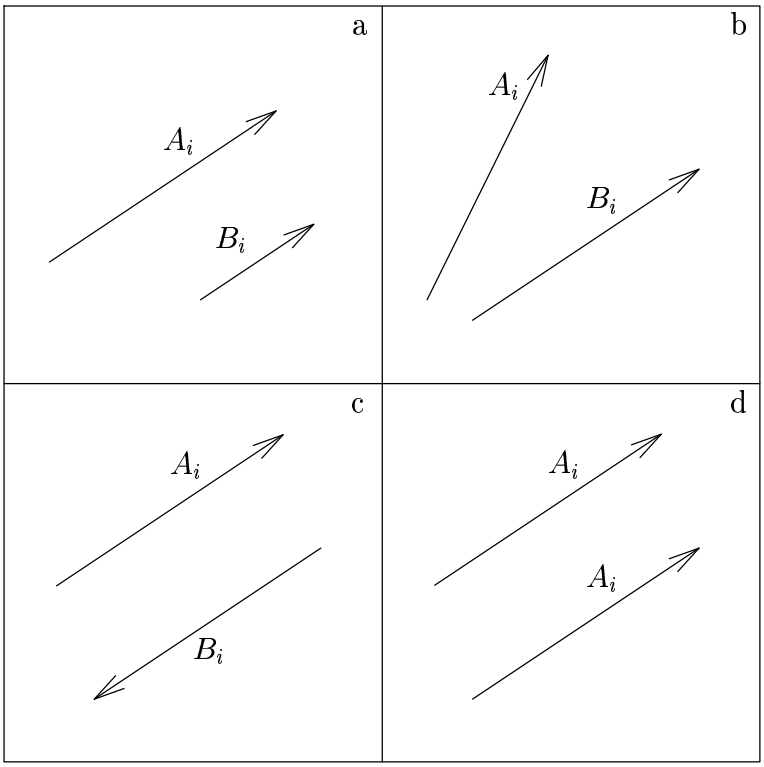
Om te beginnen, zal nu worden getracht, om een vector *zo* te definiëren, dat de definitie in overeenstemming is, met de voorlopige definitie voor ten-

soren en daarbij, den vector een meetkundige interpretatie verleent.

Een *vector* zij een georiënteerd lijnstuk, dat door zijn *drie fundamentele eigenschappen* volledig bepaald is; deze fundamentele eigenschappen zijn: *lengte*, *richting*, *oriëntatie*. Een vector worde getekend als pijl, waarbij de pijl de oriëntatie van het lijnstuk aangeve.



Afbeelding 18: *Een vector oriënteert zich naar zijn eindpunt*

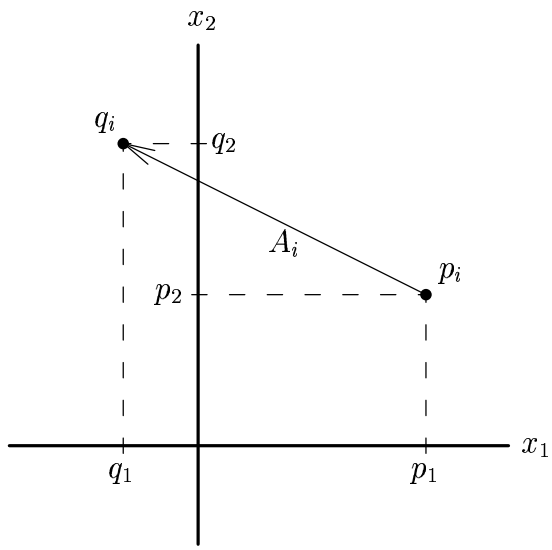


Afbeelding 19: *De vectoren*: a) *verschillen slechts in lengte*; b) *verschillen enkel in richting*; c) *verschillen uitsluitend in oriëntatie*; d) *verschillen niet*: *dezelfde vector is op twee plaatsen getekend*

Met name maakt afbeelding 19d inzichtelijk, dat hiermee inderdaad aan de voorlopige definitie voor tensoren, in zake de invariantie bij een translatie is voldaan: in een nieuw coördinatenstelsel ligt de vector op een andere plaats ten opzichte van den nieuwen oorsprong, maar zijn lengte, richting en oriëntatie zijn onveranderd gebleven.

De coördinaten van den vector zijn te bepalen, door van die van het oriëntatiepunt, de coördinaten van het beginpunt af te trekken. Voor een vector A_i met als beginpunt p_i en eindpunt q_i levert (A.34) het gewenste resultaat.

$$A_i = q_i - p_i \tag{A.34}$$



Afbeelding 20: *De coördinaten van den vector A_i, tussen zijn startpunt p_i en eindpunt q_i, verkrijge men middels* $A_i = q_i - p_i = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Het zal den lezer niet zwaar vallen, om aan te tonen, dat een translatie de coördinaten van den vector niet wijzigt. Hierbij make men gebruik van vergelijking (A.33), om begin- en eindpunt van den vector, naar hun coördinaten in het nieuwe stelsel $\tilde{x}_i$ te transformeren.

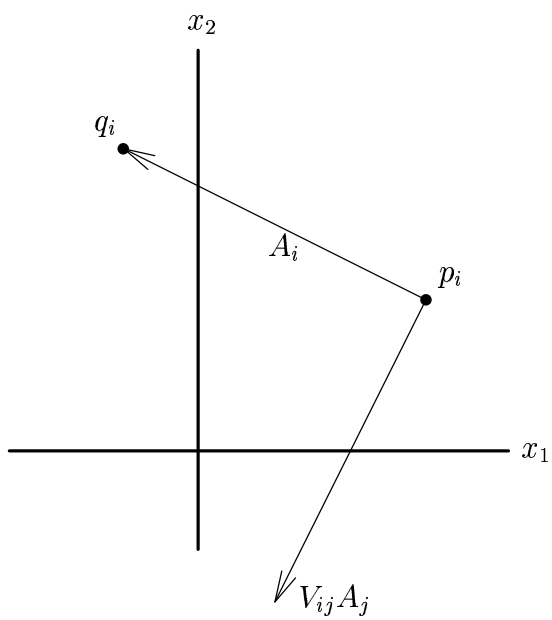
$$\tilde{A}_i = \tilde{q}_i - \tilde{p}_i = q_i - b_i - (p_i - b_i) = q_i - b_i - p_i + b_i = q_i - p_i = A_i \tag{A.35}$$

Tevens toont afbeelding 20, dat de lengte van een vector met behulp van de stelling van Pythagoras te bepalen is: zij is de hypotenusa van een rechthoekigen driehoek, waarvan de lengtes der rechthoekszijden door de coördinaten van den vector gegeven zijn. De som der kwadraten van de coördinaten wordt ook door het inproduct van den vector met zichzelf gegeven. Bij een vector A_i zij A zijn lengte.

$$A^2 = A_i A_i = A_1 A_1 + A_2 A_2 = A_1^2 + A_2^2 \tag{A.36}$$

Het is logisch, dat A, bij een beweging van het coördinatenstelsel, onveranderd blijft: daarom is A een *scalar*.

Een meetkundige interpretatie van een tensor worde gevonden, door hem in een inproduct samen met een vector te beschouwen. Het inproduct van een tensor met een vector is *weer* een vector: de tensor beeldt den vector op een vector af.



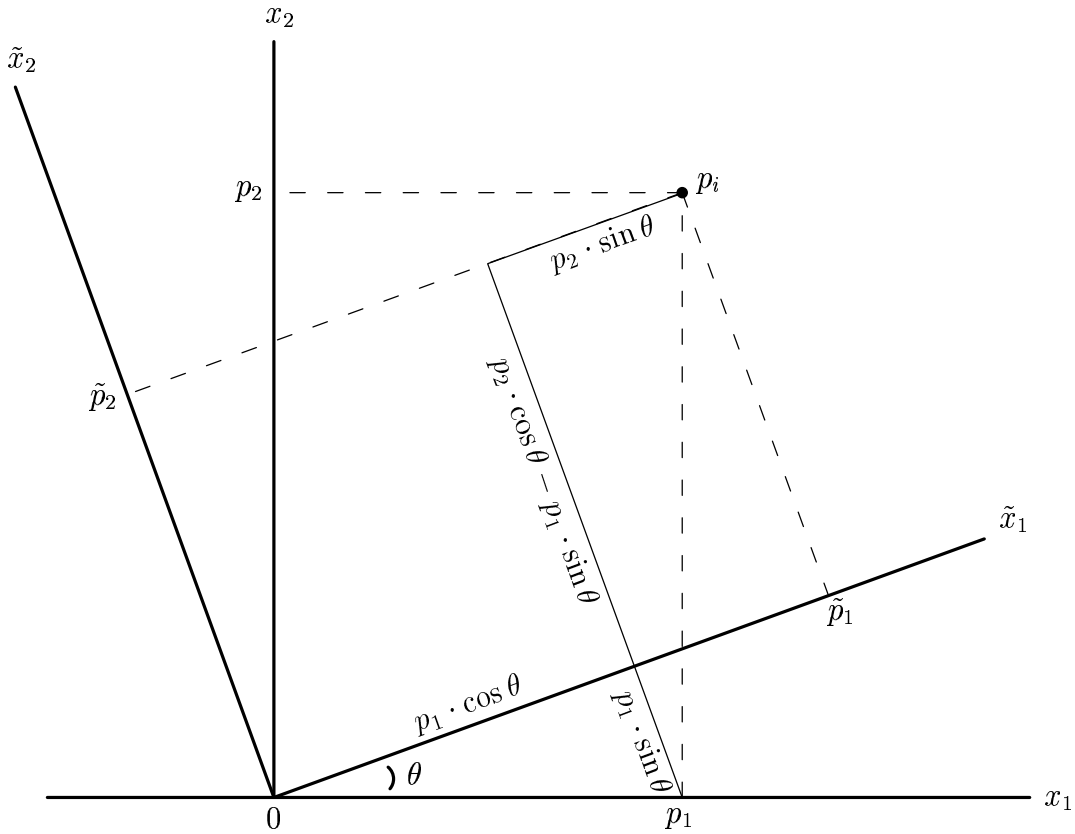
Afbeelding 21: *De V_{ij}-tensor beeldt een vector af, op den vector loodrecht daarop*

Men beschouwe als voorbeeld het inproduct van den V_{ij}-tensor[55] met den vector A_i uit afbeelding 20 en vergelijking (A.37). -

[55]Deze is het analogon van den niveau drie tensor ε_{ijk}, die in de drie-dimensionale meetkunde gebruikt wordt, om bij twee lineair onafhankelijke vectoren, een derden te vinden, die *loodrecht* op beide andere staat. In de symbolische meetkunde noemt men het dubbele inproduct $\varepsilon_{ijk} A_j B_k$ ook wel het *uitproduct* der vectoren A_i en B_i

$$\text{(A.37)} \quad V_{ij}A_j = V_{i1}A_1 + V_{i2}A_2 = \begin{pmatrix} V_{11}A_1 + V_{12}A_2 \\ V_{21}A_1 + V_{22}A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

In den eersten paragraaf is gezegd, dat de algemene beweging van het coördinatenstelsel een *rotatie* gevolgd door een *translatie* zij. Deze rotatie zal *nu* bekeken worden: daarna kunnen tensoren - door hun gedrag onder een algemene beweging - formeel gedefiniëerd worden.



Afbeelding 22: *Een rotatie van het coördinatenstelsel: stelsel $\tilde{x}_i$ is een positieven hoek θ ten opzichte van x_i gedraaid; d.w.z. dat de hoek tussen de x_1-as en de $\tilde{x}_1$-as θ bedraagt en dat terugdraaien een draaiing over een negatieven hoek voorstelle. De afbeelding toont hoe de ene van den anderen coördinaat afhangt:* $\tilde{p}_1 = \cos\theta \cdot p_1 + \sin\theta \cdot p_2$ *en* $\tilde{p}_2 = -\sin\theta \cdot p_1 + \cos\theta \cdot p_2$

De talige structuur, die deze rotatie omvatten kan, is een inproduct van een punt met een *draaimatrix*: vanzelfsprekend is dit een matrix van het tweede niveau, want de uitkomst van het bedoelde inproduct moet een -

gedraaid - punt opleveren.

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{A.38}$$

a_{ij} stelle deze draaimatrix voor: afbeelding 22 dient als hulpmiddel bij het bepalen van de coördinaten der draaimatrix. Vergelijking (A.39) schrijft de transformatie, horende bij een rotatie, uit.

$$\tilde{x}_i = a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \tag{A.39}$$

Vergelijke men dit met afbeelding 22, dan wordt inzichtelijk, dat het aanzicht der draaimatrix door (A.40) gegeven wordt.

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{A.40}$$

De meest algemene beweging van het coördinatenstelsel, die *oude* puntcoördinaten x_i naar *nieuwe* puntcoördinaten $\tilde{x}_i$ transformere, wordt door (A.41) gegeven.

$$\tilde{x}_i = a_{ij}x_j - b_i \tag{A.41}$$

De hierbij behorende *omgekeerde* transformatie, wordt nu door (A.42) gegeven: men lette op de volgorde der indices - het inproduct in (A.41) is een ander, dan dat in (A.42).

$$x_i = a_{ji}\tilde{x}_j + b_i \tag{A.42}$$

Twee alternatieve inproducten van de draaimatrix met zichzelf, resulteren in de kronecker-delta[56]: hiervan zal straks nog gebruik gemaakt worden.

$$a_{ji}a_{jk} = a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix} = \delta_{ik} \tag{A.43}$$

$$a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik} \tag{A.44}$$

$R_i = q_i - p_i$ stelle een vector relatief aan x_i voor en $\tilde{R}_i = \tilde{q}_i - \tilde{p}_i$ stelle dezen zelfden vector relatief aan $\tilde{x}_i$ voor: de vectorcoördinaten transfomeren dan onder een algemene beweging van het stelsel aldus. $\tilde{R}_i = \tilde{q}_i - \tilde{p}_i = a_{ij}q_j - b_i - (a_{ij}p_j - b_i) = a_{ij}q_j - b_i - a_{ij}p_j + b_i = a_{ij}q_j - a_{ij}p_j = a_{ij}(q_j - p_j) = a_{ij}R_j$.

[56]Met in het achterhoofd vergelijking (A.3): $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Definitie van den vector:
Indien de coördinaten van grootheid R_i onder een algemene beweging van het coördinatenstelsel transformeren als $\tilde{R}_i = a_{ij}R_j$, dan zij deze grootheid een **vector**.

Een tensor werd beschouwd, als een object dat een vector op een anderen vector afbeeldt: $S_i = T_{ij}R_j$. Relatief aan het tilde-stelsel zij de beschrijving hiervan $\tilde{S}_i = \tilde{T}_{ij}\tilde{R}_j$. Het idee is nu, om uit laatst genoemde beschrijving, eerst genoemde beschrijving af te leiden: daarna weet men, door te kijken wat zich in de afleiding voordeed, hoe de coördinaten van den tensor, zich onder een beweging van het coördinatenstelsel gedragen. De vergelijkingen (A.45) tonen een afleidingspad; er wordt gebruik gemaakt van de definitie van den vector.

$$\tilde{S}_k = \tilde{T}_{kl}\tilde{R}_l \tag{A.45a}$$
$$a_{km}S_m = \tilde{T}_{kl}a_{lj}R_j \tag{A.45b}$$
$$a_{ki}a_{km}S_m = a_{ki}\tilde{T}_{kl}a_{lj}R_j \tag{A.45c}$$
$$a_{ki}a_{km}S_m = a_{ki}a_{lj}\tilde{T}_{kl}R_j \tag{A.45d}$$
$$\delta_{im}S_m = a_{ki}a_{lj}\tilde{T}_{kl}R_j \tag{A.45e}$$
$$S_i = a_{ki}a_{lj}\tilde{T}_{kl}R_j \tag{A.45f}$$
$$S_i = T_{ij}R_j \tag{A.45g}$$

Definitie van den tensor:
Indien de coördinaten van grootheid T_{ij} onder een algemene beweging van het coördinatenstelsel transformeren als $T_{ij} = a_{ki}a_{lj}\tilde{T}_{kl}$, dan zij deze grootheid een **tensor**.

Definitie van den scalar:
Indien de grootheid U onder een algemene beweging van het coördinatenstelsel *invariant* zij, i.e. als $\tilde{U} = U$, dan zij deze grootheid een **scalar**.

VI. Van den draaitensor en den hoek tussen twee vectoren

De draaitensor D_{ij} heeft hetzelfde uiterlijk als de draaimatrix a_{ij}: deze tensor, echter, transformeert geen puntcoördinaten van het ene naar het andere stelsel, maar beeldt - relatief aan één en het zelfde stelsel - een vector af, op een anderen vector, door den eersten over een hoek θ te draaien.

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{A.46}$$

Men beschouwe nu een vectorafbeelding, middels tensor $E \cdot D_{ij}$, die een vector R_i draait en strekt, en zodoende dezen vector op S_i afbeeldt.

$$S_i = ED_{ij}R_j \tag{A.47}$$

Eerst wordt de lengte van S_i, S, uitgedrukt, in termen van de lengte van R_i.

$$S^2 = S_iS_i = E^2D_{ij}D_{ik}R_jR_k = E^2\delta_{jk}R_jR_k = E^2R_kR_k = E^2R^2 \tag{A.48}$$

Met andere woorden $S = ER$.

Voorts beschouwe men het inproduct van S_i met R_i: $S_iR_i = ED_{ij}R_jR_i = E \cdot (D_{11}R_1R_1 + D_{12}R_2R_1 + D_{21}R_1R_2 + D_{22}R_2R_2) = E \cdot (R_1^2 \cos\theta + R_2R_1 \sin\theta - R_1R_2 \sin\theta + R_2^2 \cos\theta) = ER^2 \cos\theta = E \cdot R \cdot R \cdot \cos\theta = SR\cos\theta$. Hieruit concludere men, dat de cosinus van den hoek θ, tussen S_i en R_i, gegeven wordt, door vergelijking (A.49). -

$$\cos\theta = \frac{S_iR_i}{SR} \tag{A.49}$$

B. Van differentiaalvergelijkingen

De studie van den outstar kan gereduceerd worden, tot de bestudering van bepaalde stelsels van differentiaalvergelijkingen: dit aanhangsel voorziet in een overzicht der eenvoudigste differentiaalvergelijkingen en een methode, om deze te behandelen: dit zou voldoende moeten wezen, om den tekst op dit punt te kunnen volgen.

Het oplossen van een differentiaalvergelijking komt neer, op den zoektocht naar een onbekende functie, van welke enkel informatie over - ten minste één der - afgeleiden van deze functie voorhanden is.

In den tekst wordt tussen twee soorten onderscheid gemaakt: „normale" differentiaalvergelijkingen (ODE's) en „vertraagde" differentiaalvergelijkingen (DDE's)[57]. Deze nomenclatuur is geïnspireerd door het feit, dat men den parameter, van welken de gezochte functie afhankelijk is, als „tijd" pleegt te interpreteren: deze parameter wordt in dezen gehelen tekst met de letter t aangegeven.

Een ODE is een vergelijking, waarin de afgeleide der gezochte functie op tijdstip t, gelijk, aan een functie terzelfder tijd t, gesteld wordt.

Een DDE is een vergelijking, waarin de afgeleide der gezochte functie op tijdstip t, gelijk, aan een functie op een vroeger tijdstip $t - \tau$, gesteld wordt.

De lettercombinatie dt diene als één symbool opgevat te worden en betekene de *differentie* van twee *tijdstippen*: een *scalar*[58]. Deze differentie maakt onderdeel uit van den differentiaaloperator $\frac{d}{dt}$, die samen met een functie, de afgeleide van die functie voorstelt: $\frac{d}{dt}f(t)$ stelle de afgeleide van functie $f(t)$ op tijdstip t voor.

De betekenis van deze afgeleide wordt door het *differentiaalquotiënt* gegeven: in dit quotiënt wordt een differentie bedoeld, die een *oneindig klein* tijdsverschilletje voorstelle.

$$\frac{d}{dt}f(t) \equiv \lim_{dt \to 0} \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$$

Men beschouwe de parabool $f(t) = t^2$; haar afgeleide vinde men aldus:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{(t+dt)^2 - t^2}{dt} =$$

$$\lim_{dt \to 0} \frac{t^2 + 2t \cdot dt + dt^2 - t^2}{dt} =$$

$$\lim_{dt \to 0} \frac{2t \cdot dt + dt^2}{dt} = \lim_{dt \to 0} 2t + dt = 2t + 0 = 2t$$

[57] resp. „Ordinary" en „Delay" Differential Equation

[58] Verwezen wordt naar aanhangsel A

Men beschouwe de kubische functie $f(t) = t^3$; haar afgeleide zij:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \lim_{dt\to 0}\frac{f(t+dt)-f(t)}{dt} = \lim_{dt\to 0}\frac{(t+dt)^3-t^3}{dt} =$$

$$\lim_{dt\to 0}\frac{t^3+3t^2\cdot dt+3t\cdot dt^2+dt^3-t^3}{dt} =$$

$$\lim_{dt\to 0}\frac{3t^2\cdot dt+3t\cdot dt^2+dt^3}{dt} =$$

$$\lim_{dt\to 0} 3t^2+3t\cdot dt+dt^2 = 3t^2+3t\cdot 0+0 = 3t^2$$

Deze voorbeelden tonen op welke manier, bij een bekende functie, haar afgeleide te bepalen is: draaie men dit proces om, dan wordt dat, het oplossen van een differentiaalvergelijking, geheten.

(B.1) $$\tfrac{d}{dt}f(t) = 3t^2$$

Vergelijking (B.1) tone een differentiaalvergelijking: bij het oplossen daarvan, wordt naar de onbekende functie $f(t)$ gezocht. In dit geval is men opzoek naar de kubische functie. -

Zojuist is een speciaal geval van (B.2) getoond: in het algemeen notere[59] men de oplossing hiervan, in den vorm van een oneigenlijke integraal[60] $f(t) = \int_c^t dx\cdot g(x)$.

(B.2) $$\tfrac{d}{dt}f(t) = g(t)$$

[59]Men beschouwe ook $\int_c^t dx$ als één symbool: een operator die in zekeren zin het effect van den differentiaaloperator ongedaan make. Voorbeeld: $\int_c^t dx\cdot\frac{d}{dx}f(x) = f(t)$. Nog een voorbeeld: $\int_c^t dx\cdot 3x^2 = t^3$, voor een $c\in\mathbb{R}$

[60]Voor den lezer bekend met het begrip „integraal": Indien men een continue functie $g(t)$ integreren wil, moet men een *stamfunctie* $G(t)$ zien te vinden: $\int_{t_1}^{t_5} dx\cdot g(x) = G(t_5)-G(t_1)$. Op het interval, over welk geïntegreerd wordt, bevinden zich punten t_2 en t_3, zodat voor alle $t\in< t_1, t_5 >$ geldt dat $g(t_2)\le g(t)$ en $g(t_3)\ge g(t)$. Hieruit volgt - de integraal stelle de oppervlakte onder de grafiek der functie voor - dat $[t_5-t_1]\cdot g(t_2) < \int_{t_1}^{t_5} dx\cdot g(x)$ en $[t_5-t_1]\cdot g(t_3) > \int_{t_1}^{t_5} dx\cdot g(x)$. Omdat $g(t)$ continu is, moet er op het interval waarover geïntegreerd wordt, een punt t_4 met $t_1\le t_4\le t_5$ wezen, zodat $[t_5-t_1]\cdot g(t_4) = \int_{t_1}^{t_5} dx\cdot g(x)$. Hieruit volgt dat $g(t_4) = \frac{G(t_5)-G(t_1)}{t_5-t_1}$. Als nu $t_5 = t_1+h$ en men late $h\to 0$, dan gaat $t_5\to x_1$ en ook $t_4\to t_1$, omdat t_4 is ingesloten tussen t_1 en t_5. Verder gaat $\frac{G(t_5)-G(t_1)}{t_5-t_1}\to\frac{d}{dt}G(t_1)$: $g(t_1) = \frac{d}{dt}G(t_1)$, met $G(t)$ als stamfunctie van $g(t)$. Men neme $f(t) = G(t)$ en kere naar den tekst terug

Voorts wordt een geval bezien, waarin de afgeleide ener functie afhangt van de functie *zelf*.

$$\text{(B.3)} \qquad \tfrac{d}{dt}f(t) = f(t)$$

Nu is er niks aan de integraal gelegen:

$$\frac{d}{dt}f(t) = f(t)$$

$$\int_c^t dx \cdot \frac{d}{dx}f(x) = \int_c^t dx \cdot f(x)$$

$$f(t) = \int_c^t dx \cdot f(x)$$

stamfunctie en afgeleide functie zijn aan elkander gelijk!

(B.3) laat zich echter *wel* lenen, voor het bepalen van hogere afgeleiden der functie, door aan beide kanten der vergelijking een zelfde aantal keren den differentiaaloperator[61] toe te passen: $\frac{d}{dt}f(t) = f(t) \rightarrow \frac{d^2}{dt^2}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \rightarrow \frac{d^3}{dt^3}f(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(t)$. Het spreekt voor zich, dat men dit proces altoos kan voortzetten, zodat iedere hogere afgeleide der functie uit deze ene vergelijking - welke slechts *indirecte* informatie over haar verschaft - te bepalen is: wordt nu voor één tijdstip, e.g. $t = 0$, der functie een waarde gegeven, e.g. $f(0) = 1$, dan hebben daarmede *alle* hogere afgeleiden van die functie terzelfder tijd, *ook* deze waarde.

Het differentiëren[62] van de functie gegeven door (B.4) laat zien, dat deze een oplossing is voor (B.3).

$$\text{(B.4)} \qquad f(t) = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{120}t^5 + ...$$

De getoonde *reeks* is zo belangrijk, dat haar een speciale naam[63] verleend is: e^t. De oplossing van $\frac{d}{dt}f(t) = f(t)$ is dus $f(t) = e^t$.

Dit is 't fondament, waarop voortgebouwd worden zal. Men merke hierbij op, dat voor een willekeurige constante $A \in \mathbb{R}$, de functie $f(t) = Ae^t$ ook een oplossing van (B.3) is, want $\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}Ae^t = A\frac{d}{dt}e^t = Ae^t = f(t)$.

---

[61] Twee keer toepassen van dezen operator $\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}$ verkorte men middels $\frac{d^2}{dt^2}$; drie keer aanwenden $\frac{d}{dt}\frac{d^2}{dt^2}$ middels $\frac{d^3}{dt^3}$ enzovoorts

[62] Men houde in het achterhoofd dat $\frac{d}{dt}t^N = Nt^{N-1}$ en wijders den somregel $\frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] = \frac{d}{dt}f(t) + \frac{d}{dt}g(t)$: zo geldt bij voorbeeld $\frac{d}{dt}[5t^3 + 7t^2] = 5\frac{d}{dt}t^3 + 7\frac{d}{dt}t^2 = 15t^2 + 14t$

[63] De naam van het zgn. *grondgetal* van deze functie, e, is door den heer Leonhard Euler (1707-1783) bedacht ☺

Dat vergelijking (B.3) een weinig uitgebreid zij!

$$\frac{d}{dt}f(t) = g(t) \cdot f(t) \tag{B.5}$$

Vergelijking (B.3) is een speciaal geval, c.q. $g(t) = 1$, van (B.5) en deswege doet dit vermoeden, dat de oplossing hiervan, wel weer eens een e-functie zou kunnen wezen. Een regel voor differentiëren, die hier het uiterlijk der oplossing verklappe, is één, in welken een *product* voorkomt - in den „kettingregel" komt een product voor: $\frac{d}{dt}f(\psi(t)) = \frac{d}{dt}\psi(t) \cdot \frac{d}{d\psi}f(\psi)$.

Door gebruikt te maken van het feit $\frac{d}{d\psi}e^{\psi} = e^{\psi}$ en te veronderstellen dat $f(\psi) = e^{\psi}$, resulteert het aanwenden van den kettingregel in (B.6).

$$\frac{d}{dt}f(\psi(t)) = \frac{d}{dt}\psi(t) \cdot f(\psi(t)) \tag{B.6}$$

De functie $f(\psi(t))$ is *direct* afhankelijk van $\psi(t)$, op haar beurt *direct* afhankelijk van t: $f(\psi(t))$ is dus *indirect* ook van t afhankelijk. Omdat ψ hier slechts als hulpmiddel dienst doet, make men beter *geen* onderscheid tussen „direct" en „indirect".

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}\psi(t) \cdot f(t) \tag{B.7}$$

Het naast elkaar leggen van (B.5) en (B.7), geeft de relatie tussen $g(t)$ in 't probleem en $\psi(t)$ in - de constructie van - 't antwoord: $\frac{d}{dt}\psi(t) = g(t)$, met andere woorden $\psi(t) = \int_c^t dx \cdot g(x)$. (B.8) geeft de oplossing voor (B.5).

$$f(t) = e^{\int_c^t dx \cdot g(x)} \tag{B.8}$$

Voor den laatsten keer wordt basisvergelijking (B.3) uitgebreid.

$$\frac{d}{dt}f(t) = g(t) \cdot f(t) + h(t) \tag{B.9}$$

Nu is een differentiëerregel met een plus vereist: dit suggereert den „productregel". Differentiëre men namelijk het product van twee functies, dan:

$$\frac{d}{dt}[\psi(t) \cdot \zeta(t)] = \psi(t) \cdot \frac{d}{dt}\zeta(t) + \zeta(t) \cdot \frac{d}{dt}\psi(t)$$

Nu zij de oplossing van (B.9) gegeven door $f(t) = \psi(t) \cdot \zeta(t)$, waarbij $\zeta(t) = e^{\int_c^t dx \cdot g(x)}$, zodat $\frac{d}{dt}\zeta(t) = g(t) \cdot \zeta(t)$ en de eerste term uit het rechterlid van den productregel $\psi(t) \cdot \frac{d}{dt}\zeta(t) = \psi(t) \cdot g(t) \cdot \zeta(t) = g(t) \cdot \psi(t) \cdot \zeta(t) = g(t) \cdot f(t)$ wordt. Overeenstemming met (B.9) wordt bereikt, mits $h(t) = \zeta(t) \cdot \frac{d}{dt}\psi(t)$.

Functie $h(t)$ komt in de probleemstelling voor en mag derhalve als *bekend* opgevat worden: de enige onbekende functie is $\psi(t)$, die bij de constructie van de oplossing geïntroduceerd werd. De oplossing is dan ook compleet, wanneer de identiteit van $\psi(t)$ ontsluierd is.

Om te beginnen wordt $\zeta(t)$ in de uitdrukking voor $h(t)$ expliciet gemaakt: $h(t) = \zeta(t) \cdot \frac{d}{dt}\psi(t) = e^{\int_c^t dx \cdot g(x)} \cdot \frac{d}{dt}\psi(t)$. Nu kan $\psi(t)$ met behulp van de *Euler*-functie en twee functies uit de probleemstelling omschreven worden. Haar afgeleide[64] is gelijk aan $\frac{d}{dt}\psi(t) = e^{-\int_c^t dx \cdot g(x)} \cdot h(t)$ en daarom is *haar* identiteit gegeven in (B.10).

(B.10) $$\psi(t) = \int_c^t dy \cdot [h(y) e^{-\int_c^y dx \cdot g(x)}]$$

Er zijn slechts nog ODE's behandeld: (B.11) geeft een voorbeeld van een DDE.

(B.11) $$\frac{d}{dt} f(t) = f(t - \tau)$$

Met betrekking tot *deze* vergelijking zij opgemerkt, dat aangetoond - waarbij vergelijking (A.10) een grote rol speelt - kan worden, dat de afgeleiden van cosinus en sinus door resp. (B.12) en (B.13) gegeven worden.

(B.12) $$\frac{d}{dt} \cos(t) = \cos(t - \tfrac{3\pi}{2})$$

(B.13) $$\frac{d}{dt} \sin(t) = \sin(t - \tfrac{3\pi}{2})$$

Dat betekent, dat *zowel* de functie $\cos(t)$ *als* de functie $\sin(t)$ oplossing is van (B.11), mits $\tau = \frac{3\pi}{2}$.

Met de introductie der complexe getallen in het volgende aanhangsel, komt tevens een mooie connectie tussen ODE's en DDE's aan het licht: nl. dat (B.14) en (B.15) *dezelfde* oplossing $f(t) = e^{it}$ hebben, met een complexe constante $i^2 = -1$.

(B.14) $$\frac{d}{dt} f(t) = i \cdot f(t)$$

(B.15) $$\frac{d}{dt} f(t) = f(t - \tfrac{3\pi}{2})$$

[64] Er geldt $e^x e^y = e^{x+y}$ en in het bijzonder $e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0$; sinds de constructie der oplossing van (B.3) weet men $e^0 = 1$ - net zoals al haar afgeleiden op dat tijdstip. In dit verband betekent dat: $h = e^x \psi' \to e^{-x} h = e^{-x} e^x \psi' \to e^{-x} h = \psi'$

C. Van complexe getallen

Dit aanhangsel is bedoeld om in het kort complexe getallen nader toe te lichten: als startpunt worden de reële[65] getallen gekozen. Indien niet anders vermeld, zullen in het vervolg van dit aanhangsel dun gedrukte latijnse, griekse letters en arabische cijfers, reële getallen voorstellen; vet gedrukte latijnse, griekse letters en arabische cijfers, zijn complex.

De verzameling der reële getallen worde met $\mathbb{R}$ aangegeven en die der complexe getallen met $\mathbb{C}$.

Om te beginnen zullen de complexe getallen worden gedefiniëerd en geïdentificeerd en zal aangegeven worden, hoe men complexe getallen dient op te tellen en te vermenigvuldigen: dit laatste wordt geïllustreerd, aan de hand van een aantal stellingen, dat hiermede kan worden afgeleid.

Definitie van het complexe getal:
Een complex getal is een geordend paar van reële getallen: de twee reële getallen, die samen één complex getal vormen, worden middels *rechte haken* samengevoegd en door een verticale streep van elkander gescheiden.

Voorbeeld: als $a, b \in \mathbb{R}$, dan $[a|b] \in \mathbb{C}$.
Het eerste reële getal van het paar wordt „reëel deel" en het tweede wordt „imaginair deel" geheten. Notatie: $\mathrm{Re}([a|b]) = a$ en $\mathrm{Im}([a|b]) = b$.

Definitie van identiteit:
Twee complexe getallen $[a|b]$ en $[c|d]$ zijn gelijk, *enkel en alleen als* $a = c$ en $b = d$.

Definitie van de som van twee complexe getallen:
$[u|v] + [x|y] = [u + x|v + y]$

Definitie van het product van twee complexe getallen:
$[u|v][x|y] = [ux - vy|uy + vx]$

Stelling C.1 („associatieve wetten"):
Voor alle $\mathbf{c}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}$ geldt:
i) $\mathbf{c} + (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = (\mathbf{c} + \mathbf{w}) + \mathbf{z}$
ii) $\mathbf{c}(\mathbf{wz}) = (\mathbf{cw})\mathbf{z}$

[65] Een meesterwerk en uitstekende inleiding tot reële en complexe getallen, vinde men in [9]

Bewijs:
Voor $a, b, u, v, x, y \in \mathbb{R}$ gelde er: $\mathbf{c} = [a|b]$, $\mathbf{w} = [u|v]$, $\mathbf{z} = [x|y]$.
Associatieve wet voor sommen:
$\mathbf{c}+(\mathbf{w}+\mathbf{z}) = [a|b]+([u|v]+[x|y]) = [a|b]+[u+x|v+y] = [a+u+x|b+v+y] = [a+u|b+v]+[x|y] = ([a|b]+[u|v])+[x|y] = (\mathbf{c}+\mathbf{w})+\mathbf{z}$
Associatieve wet voor producten:
$\mathbf{c}(\mathbf{wz}) = [a|b]([u|v][x|y]) = [a|b][ux-vy|uy+vx] = [a(ux-vy)-b(uy+vx)|a(uy+vx)+b(ux-vy)] = [aux-avy-buy-bvx|auy+avx+bux-bvy] = [x(au-bv)-y(av+bu)|x(av+bu)+y(au-bv)] = [au-bv|av+bu][x|y] = ([a|b][u|v])[x|y] = (\mathbf{cw})\mathbf{z}$

Stelling C.2 („commutatieve wetten"):
Voor alle $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}$ geldt:
i) $\mathbf{w}+\mathbf{z} = \mathbf{z}+\mathbf{w}$
ii) $\mathbf{wz} = \mathbf{zw}$

Bewijs:
Voor $u, v, x, y \in \mathbb{R}$ gelde er: $\mathbf{w} = [u|v]$, $\mathbf{z} = [x|y]$.
Commutatieve wet voor sommen:
$\mathbf{w}+\mathbf{z} = [u|v]+[x|y] = [u+x|v+y] = [x+u|y+v] = [x|y]+[u|v] = \mathbf{z}+\mathbf{w}$
Commutatieve wet voor producten:
$\mathbf{wz} = [u|v][x|y] = [ux-vy|uy+vx] = [xu-yv|xv+yu] = [x|y][u|v] = \mathbf{zw}$

Stelling C.3 („distributieve wet"):
Voor alle $\mathbf{c}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}$ geldt:
$\mathbf{c}(\mathbf{w}+\mathbf{z}) = \mathbf{cw}+\mathbf{cz}$

Bewijs:
Voor $a, b, u, v, x, y \in \mathbb{R}$ gelde er: $\mathbf{c} = [a|b]$, $\mathbf{w} = [u|v]$, $\mathbf{z} = [x|y]$.
$\mathbf{c}(\mathbf{w}+\mathbf{z}) = [a|b]([u|v]+[x|y]) = [a|b][u+x|v+y] = [a(u+x)-b(v+y)|a(v+y)+b(u+x)] = [au+ax-bv-by|av+ay+bu+bx] = [au-bv+ax-by|av+bu+ay+bx] = [au-bv|av+bu]+[ax-by|ay+bx] = [a|b][u|v]+[a|b][x|y] = \mathbf{cw}+\mathbf{cz}$

Stelling C.4:
Voor alle $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ geldt: $\mathbf{z}+[0|0] = \mathbf{z}$

Bewijs:
Voor $x, y \in \mathbb{R}$ gelde er: $\mathbf{z} = [x|y]$.
$\mathbf{z}+[0|0] = [x|y]+[0|0] = [x+0|y+0] = [x|y] = \mathbf{z}$

Stelling C.5:

Voor alle $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ geldt: $\mathbf{z} \cdot [0|0] = [0|0]$

Bewijs:
Voor $x, y \in \mathbb{R}$ gelde er: $\mathbf{z} = [x|y]$.
$\mathbf{z} \cdot [0|0] = [x|y] \cdot [0|0] = [x \cdot 0 - y \cdot 0 | x \cdot 0 + y \cdot 0] = [0|0]$

Stelling C.6:
Voor alle $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ geldt: $\mathbf{z} \cdot [1|0] = \mathbf{z}$

Bewijs:
Voor $x, y \in \mathbb{R}$ gelde er: $\mathbf{z} = [x|y]$.
$\mathbf{z} \cdot [1|0] = [x|y] \cdot [1|0] = [x \cdot 1 - y \cdot 0 | x \cdot 0 + y \cdot 1] = [x - 0 | 0 + y] = [x|y] = \mathbf{z}$

Stelling C.7:
Voor alle $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}$ bestaat er een $\mathbf{c} \in \mathbb{C}$ zodat: $\mathbf{w} + \mathbf{c} = \mathbf{z}$
Deze $\mathbf{c}$ hete $\mathbf{z} - \mathbf{w}$ ($-$ spreekt: min) of „verschil" of „differentie" van $\mathbf{z}$ en $\mathbf{w}$

Bewijs:
Voor $a, b, u, v, x, y \in \mathbb{R}$ gelde er: $\mathbf{c} = [a|b]$, $\mathbf{w} = [u|v]$, $\mathbf{z} = [x|y]$.
$\mathbf{w} + \mathbf{c} = [u|v] + [a|b] = [u + a | v + b] = [x|y]$
Hetgeen waar is indien: $a = x - u$ en $b = y - v$

Stelling C.8:
Voor alle $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ geldt $\mathbf{z} - \mathbf{w} = [0|0]$ enkel en alleen als $\mathbf{w} = \mathbf{z}$

Bewijs:
Voor $u, v, x, y \in \mathbb{R}$ gelde er: $\mathbf{w} = [u|v]$, $\mathbf{z} = [x|y]$.
$\mathbf{z} - \mathbf{w} = [x|y] - [u|v] = [0|0]$, nu geldt op grond van de vorige stelling $0 = x - u \rightarrow u = x$ en $0 = y - v \rightarrow v = y$, d.w.z. $\mathbf{w} = \mathbf{z}$

Definitie: $-\mathbf{z} = [0|0] - \mathbf{z}$

Stelling C.9:
Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt: als $\mathbf{z} = [x|y]$ dan $-\mathbf{z} = [-x| - y]$

Bewijs:
Voor $u, v, x, y \in \mathbb{R}$ gelde er: $-\mathbf{z} = [u|v]$, $\mathbf{z} = [x|y]$.
$-\mathbf{z} = [u|v] = [0|0] - [x|y]$, nu geldt op grond van stelling C.7: $u = 0 - x = -x$ en $v = 0 - y = -y$, d.w.z. $-\mathbf{z} = [u|v] = [-x| - y]$

Stelling C.10:

Voor alle $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}$ waarbij $\mathbf{w} \neq [0|0]$ bestaat er een $\mathbf{c} \in \mathbb{C}$ zodat: $\mathbf{wc} = \mathbf{z}$
Deze $\mathbf{c}$ hete $\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}}$ (spreekt: $\mathbf{z}$ gedeeld door $\mathbf{w}$)

Bewijs:
Voor $a, b, u, v, x, y \in \mathbb{R}$ gelde er: $\mathbf{c} = [a|b]$, $\mathbf{w} = [u|v]$, $\mathbf{z} = [x|y]$.
$\mathbf{wc} = [u|v][a|b] = [ua - vb|ub + va] = [x|y]$.

Ten eerste geldt er $ua - vb = x \rightarrow ua = x + vb \rightarrow a = \frac{1}{u}x + \frac{v}{u}b$.

Ten tweede geldt $ub + va = y$; men vulle de uitdrukking die voor a bepaald is, hier in: $ub + va = ub + v \cdot (\frac{1}{u}x + \frac{v}{u}b) = ub + \frac{v}{u}x + \frac{v^2}{u}b = y$. Deze vergelijking wordt nu met u vermenigvuldigd: $u \cdot (ub + \frac{v}{u}x + \frac{v^2}{u}b) = u^2b + \frac{uv}{u}x + \frac{uv^2}{u}b = u^2b + vx + v^2b = (u^2 + v^2) \cdot b + vx = uy$. Vervolgens: $(u^2 + v^2) \cdot b + xv - xv = yu - xv \rightarrow (u^2 + v^2) \cdot b = yu - xv$.

De uitdrukking voor b is derhalve: $b = \frac{yu-xv}{u^2+v^2}$.

Men kere nu terug naar de uitdrukking voor ua en bepale a aldus: $ua = x + vb = x + v \cdot \frac{yu-xv}{u^2+v^2} = x + \frac{yuv-xv^2}{u^2+v^2} = \frac{xu^2+xv^2}{u^2+v^2} + \frac{yuv-xv^2}{u^2+v^2} = \frac{xu^2+xv^2+yuv-xv^2}{u^2+v^2} = \frac{xu^2+yuv}{u^2+v^2}$.

Delen door u levert: $a = \frac{xu+yv}{u^2+v^2}$.

Dat wil zeggen dat $\mathbf{c} = [\frac{xu+yv}{u^2+v^2}|\frac{yu-xv}{u^2+v^2}]$: deze $\mathbf{c}$ bestaat altijd, want $\mathbf{w} \neq [0|0]$ en daarom is $u^2 + v^2$ nooit nul! -

Voorts zal worden getoond, dat $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, i.e. de verzameling der reële getallen is een deelverzameling van die der complexe getallen.

Stelling C.11:
Voor alle $[u|0], [x|0] \in \mathbb{C}$ geldt: $[u|0] + [x|0] = [u + x|0]$

Bewijs:
Deze stelling volgt direct uit de definitie van de som van twee complexe getallen.

Stelling C.12:
Voor alle $[u|0], [x|0] \in \mathbb{C}$ geldt: $[x|0] - [u|0] = [x - u|0]$

Bewijs:
Stelling C.7, welke het verschil van twee complexe getallen definiëert, met $v = y = 0$.

Stelling C.13:
Voor alle $[u|0], [x|0] \in \mathbb{C}$ geldt: $[u|0][x|0] = [ux|0]$

Bewijs:
$[u|0][x|0] = [ux - 0 \cdot 0 | u \cdot 0 + x \cdot 0] = [ux|0]$.

Stelling C.14:
Voor alle $[u|0], [x|0] \in \mathbb{C}$ waarbij $u \neq 0$ geldt: $\frac{[x|0]}{[u|0]} = [\frac{x}{u}|0]$

Bewijs:
Stelling C.10, welke het quotiënt van twee complexe getallen definiëert, met $v = y = 0$ levert: $\frac{[x|0]}{[u|0]} = \mathbf{c} = [\frac{xu+yv}{u^2+v^2} | \frac{yu-xv}{u^2+v^2}] = [\frac{xu+0\times 0}{u^2+0^2} | \frac{0 \cdot u - x \cdot 0}{u^2+0^2}] = [\frac{xu}{u^2} | \frac{0-0}{u^2}] = [\frac{x}{u}|0]$.

Stelling C.15:
Voor alle $[x|0] \in \mathbb{C}$ geldt: $-[x|0] = [-x|0]$

Bewijs:
Stelling C.9 met $y = 0$.

De stellingen C.11 tot en met C.15 laten zien, dat voor alle reële x, het complexe getal $[x|0]$ en gegeven reël getal x - in zake *som*, *verschil*, *product*, *quotiënt* - zich eender gedragen, wijders dat er voor alle reële $-x$, een corresponderend complex getal $-[x|0]$ bestaat.

De complexe getallen $[x|0]$ nemen alle functies der reële getallen over: behalve voor de *definitie* der complexe getallen, zijn deze deswege overbodig en worden daarom weggegooid; vanaf nu zij er slechts nog van complexe getallen te praten.

Omdat alle getallen complex zijn, behoeven deze niet meer vet gedrukt te worden: indien er met den naam een reëel getal bedoeld zij, dan is die naam x op te vatten als een een verkorte schrijfwijze van $[x|0]$. Zo schrijve men liever 1 dan $[1|0]$ en bij voorkeur 0 in plaats van $[0|0]$. Voorts wordt $[x|y]$ als alternatief voor bij voorbeeld z behouden. -

Definitie van de imaginaire eenheidsconstante: $i = [0|1]$

Stelling C.16: $i^2 = -1$

Bewijs:
$i^2 = i \cdot i = [0|1][0|1] = [0 \times 0 - 1 \times 1 | 0 \times 1 + 1 \times 0] = [-1|0] = -1$.

Stelling C.17:
Alle complexe getallen $[x|y]$ kunnen in den vorm $x + iy$ geschreven worden.

Bewijs:
$[x|y] = [x + 0|0 + y] = [x|0] + [0|y] = x + [0 \cdot y - 1 \times 0|0 \times 0 + 1 \cdot y] = x + [0|1][y|0] = x + iy$.

Bij dezen is $[x|y]$ overbodig geworden als manier van schrijven en zal mitsdien niet meer gehanteerd worden. Men merke op dat $\mathrm{Re}(x + iy) = x$ en $\mathrm{Im}(x + iy) = y$. Het getal $x + iy$ kan als normale algebraïsche zin - die zegt dat „i keer y bij x gevoegd wordt" - gelezen worden, mits men i^2 als -1 interpretere.

Een tweetal voorbeelden. Het eerste zet voor de overzichtelijkheid in den tweeden stap $z = x + iy$, om dit - na den eersten keer de „distributieve wet" te hebben toegepast - weer in den originelen toestand terug te brengen:
I)

$$(x + iy)(u + iv) = z(u + iv) = zu + izv =$$
$$(x + iy)u + i(x + iy)v = u(x + iy) + iv(x + iy) =$$
$$ux + iuy + ivx + i^2vy = ux + i(uy + vx) + -1vy =$$
$$ux - vy + i(uy + vx),$$

II)

$$\frac{x + iy}{u + iv} = (x + iy)\frac{1}{u + iv} = (x + iy)\frac{u - iv}{(u + iv)(u - iv)} =$$
$$(x + iy)\frac{u - iv}{u^2 - iuv + ivu - i^2v^2} =$$
$$(x + iy)\frac{u - iv}{u^2 - i^2v^2} = (x + iy)\frac{u - iv}{u^2 - -1v^2} =$$
$$(x + iy)\frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{u^2 + v^2} =$$
$$\frac{xu - i^2yv - ixv + iyu}{u^2 + v^2} = \frac{xu + yv + i(yu - xv)}{u^2 + v^2} =$$
$$\frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\frac{yu - xv}{u^2 + v^2},$$

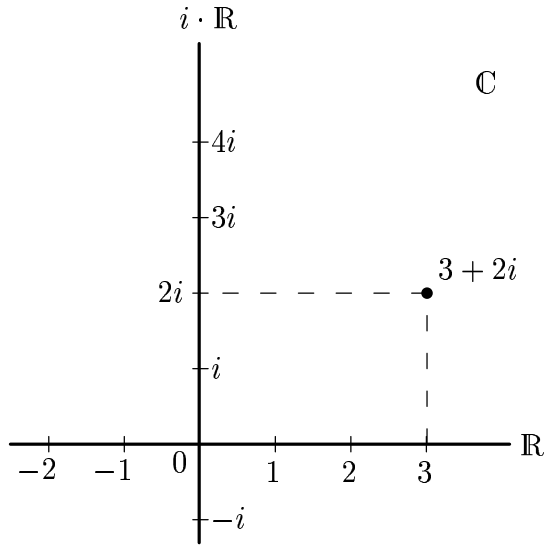
cf. stelling C.10.

Gelijk de reële getallen door een lijn weergegeven kunnen worden, kunnen de complexe getallen op een vlak samengevoegd worden: afbeelding 23 op de volgende bladzijde toont dit.

In dit vlak liggen de reële getallen op de lijn, die in aanhangsel A de x_1-as van het coördinatenstelsel genoemd is; op de x_2-as liggen de imaginaire getallen[66].

De definitie van de absolute waarde $|x|$ van een reëel getal x is gelijk aan x, indien $x \geq 0$ en gelijk aan $-x$, als $x < 0$. Zo is bij voorbeeld $|3| = 3$ en $|-2| = 2$.

Deze absolute waarde komt met de lengte van het lijnstuk, tussen bedoeld getal en 0, overeen: dit suggereert om de absolute waarde van complexe getallen op eendere wijze te definiëren.



Afbeelding 23: *Het complexe vlak* $\mathbb{C}$*, waarin de locatie van het getal* $3+2i$ *is aangegeven*

Definitie van de absolute waarde van een complex getal:
De absolute waarde van $x + iy$ is gelijk aan $|\sqrt{x^2 + y^2}|$; men notere dit aldus[67]: $|x + iy| = |\sqrt{x^2 + y^2}|$.

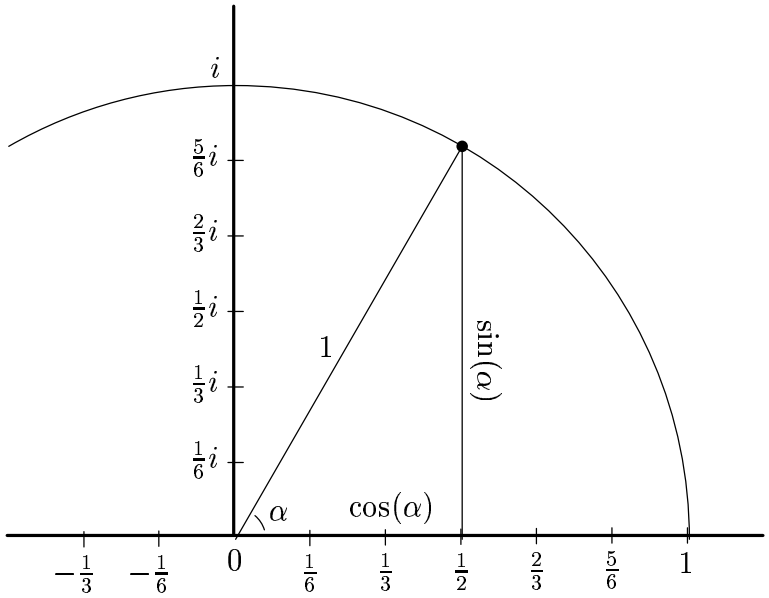
Complexe getallen z voor welke geldt, dat zij alle gelijkwaardig met elkander zijn wat betreft hun absolute waarde, liggen op een cirkel rond den oorsprong: zij alle hebben een gelijken afstand tot 0. Twee van elkaar verschillende complexe getallen met een gelijkwaardig absoluut bedrag, onderscheiden zich van mekaar, door een verschillend *argument* te bezitten.

Afbeelding 24 toont een deel der complexe z, voor welke geldt dat $|z| = 1$: deze getallen laten zich in den vorm $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ schrijven, waarbij

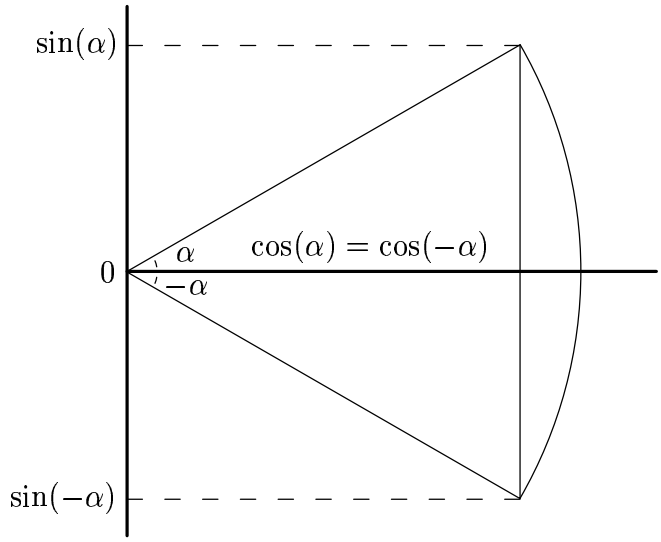
[66] Dit zijn getallen die geen reëel deel hebben, i.e. hun reëel deel zij nul

[67] De absoluutstrepen om den wortel voorkomen het negatieve resultaat van dien wortel

α een argument voorstelt. Dat deze getallen inderdaad een absoluut bedrag gelijk aan 1 hebben, laat zich gemakkelijk bepalen: $|z| = |\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)| = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = \sqrt{1} = 1$; cf. vergelijking (A.3) op bladzijde 44.



Afbeelding 24: *Getallen met* $|z| = 1$; *het getal* $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ *heeft een argument* α. *Men merke op dat* **co***sinus weer* **met** *of* **aan** *den hoek ligt*



Afbeelding 25: $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ *en* $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

Als men het lijnstuk tussen de getallen 0 en 1 om den oorsprong *tegen de klok in* draait, dan ontstaat een *positieve* hoek α, dien dat lijnstuk met de reële lijn maakt: deze α hete het argument van het getal $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.

Indien $\alpha = \frac{\pi}{2}$, dan eindigt het gedraaide lijnstuk op getal i: cf. afbeelding 24; dat wil zeggen dat $\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i = 0 + i \cdot 1$. Op grond van de definitie van identiteit moet dan gelden: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ en $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Afbeelding 25 toont dat *met de klok mee* draaien, opgevat wordt als ware er over een *negatieven* hoek gedraaid: het gedraaide lijnstuk eindigt dan op een getal *onder* de reële lijn en daarom geldt $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

Stelling C.18: $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$

Bewijs:
Volgens vergelijking (A.10) geldt er: $\cos(\zeta - \theta) = \cos(\theta)\cos(\zeta) + \sin(\theta)\sin(\zeta)$.
Men neme nu $\zeta = \frac{\pi}{2}$:
$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)\cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\theta)\sin(\frac{\pi}{2}) = \cos(\theta) \cdot 0 + \sin(\theta) \cdot 1 = \sin(\theta)$.

Stelling C.19: $\cos(\frac{\pi}{2} + t) = -\sin(t)$

Bewijs:
Men neme in de vorige stelling $\theta = -t$:
$\cos(\frac{\pi}{2} - -t) = \cos(\frac{\pi}{2} + t) = \sin(-t) = -\sin(t)$.

Stelling C.20: $\sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos(t)$

Bewijs:
Men neme in stelling C.18 $\theta = \frac{\pi}{2} + t$:
$\cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} + t)) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - t) = \cos(-t) = \cos(t) = \sin(\frac{\pi}{2} + t)$.

Stelling C.21: $\cos(2\pi + t) = \cos(t)$

Bewijs:
Men passe hier de stellingen C.19 en C.20 om en om toe:
$\cos(2\pi + t) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + t) = -\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + t) = -\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + t) = - -\sin(\frac{\pi}{2} + t) = \sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos(t)$.

Op analoge wijze kan men ook tonen dat: $\sin(2\pi + t) = \sin(t)$.

Stelling C.22:
De functie $f(t)$ - gegeven door $f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$ - is een oplossing van de differentiaalvergelijking: $i \cdot \frac{d}{dt} f(t) = -f(t)$.

Bewijs:
Volgens (B.12) en (B.13) geldt er:
$\frac{d}{dt}\cos(t) = \cos(t - \frac{3\pi}{2})$ en $\frac{d}{dt}\sin(t) = \sin(t - \frac{3\pi}{2})$.

$$i \cdot \frac{d}{dt} f(t) =$$

$$i \cdot \frac{d}{dt}[\cos(t) + i\sin(t)] = i \cdot [\frac{d}{dt}\cos(t) + i\frac{d}{dt}\sin(t)] =$$

$$i \cdot \frac{d}{dt}\cos(t) + i^2\frac{d}{dt}\sin(t) = i \cdot \frac{d}{dt}\cos(t) - \frac{d}{dt}\sin(t) =$$

$$i \cdot \cos(t - \frac{3\pi}{2}) - \sin(t - \frac{3\pi}{2})$$

Passe men nu stelling C.21 toe, dan:

$$i \cdot \cos(t - \frac{3\pi}{2}) - \sin(t - \frac{3\pi}{2}) = i \cdot \cos(t - \frac{3\pi}{2} + 2\pi) - \sin(t - \frac{3\pi}{2} + 2\pi)$$

$$i \cdot \cos(t + \frac{\pi}{2}) - \sin(t + \frac{\pi}{2})$$

Voorts passe men C.19 en C.20 toe:

$$i \cdot \cos(t + \frac{\pi}{2}) - \sin(t + \frac{\pi}{2}) = -i \cdot \sin(t) - \cos(t) =$$

$$-[\cos(t) + i\sin(t)]$$

Daarmede is de stelling bewezen.

Ten slotte zij nog opgemerkt dat $i \cdot \frac{d}{dt}e^{it} = i^2 \cdot \frac{d}{dt}e^{it} = -\frac{d}{dt}e^{it}$, hetgeen een definitie motiveert, zoals:

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

D. JAVA-programma voor het simuleren van het ODE systeem

```
import java.awt.*;
    import java.lang.Math;

    public class ODE extends Frame
     {
     double y[]=new double[2];
     double dydx[]=new double[2];
     double yout[]=new double[2];

     public void derivs(double s[], double r[])
      {
      double A=-3.0;
      double B=2.0;
      double C=1.0;
      double D=-1.0;

      s[0]=A*r[0]+B*r[1];
      s[1]=C*r[0]+D*r[1];
      } /* void derivs(double[],double[]) endp */

     public void rk4(double h)
      {
      int i;
      double hh,h6;
      double yt[]=new double[2];
      double k1[]=new double[2];
      double k2[]=new double[2];
      double k3[]=new double[2];
      double k4[]=new double[2];

      hh=h*0.5;   h6=h/6.0;

      for (i=0; i!=2; ++i)
       k1[i]=dydx[i];

      for (i=0; i!=2; ++i)    yt[i]=y[i]+hh*k1[i];
```

```
 derivs(k2,yt);

 for (i=0; i!=2; ++i)
  yt[i]=y[i]+hh*k2[i];

 derivs(k3,yt);

 for (i=0; i!=2; ++i)
  yt[i]=y[i]+h*k3[i];

 derivs(k4,yt);

 for (i=0; i!=2; ++i)
  yout[i]=y[i]+h6*(k1[i]+2*k2[i]+2*k3[i]+k4[i]);

 derivs(dydx,yout);
 } /* void rk4(double) endp */

public void update(Graphics g)
 {
 int teller=0;
 int i,xOffs,yOffs;
 double time=0.0;
 double maxTime=7.0;
 double timeStep=0.01;
 Color colour1=new Color(200,200,0);
 Color colour2=new Color(0,200,200);

 g.setColor(colour2);
 g.drawLine(50,250,750,250);
 g.drawLine(50,450,750,450);
 g.drawLine(50,50,50,550);

 g.setColor(colour1);
 y[0]=3.0; y[1]=0.0;
 derivs(dydx,y);

 xOffs=50;
 while(time<maxTime)
  {
  rk4(timeStep);
```

```
  for(i=0; i!=2; ++i)
   y[i]=yout[i];

  if((teller%1)==0)
   {
   for(i=0; i!=2; ++i)
    {
    yOffs=(200*i+250)-(int)(100.0*y[i]);
    g.drawLine(xOffs,yOffs,xOffs+1,yOffs);
    }
   ++xOffs;
   }
  ++teller;
  time=time+timeStep;
  }
 System.out.println(y[0]);
 System.out.println(y[1]);
 System.out.println(y[0]/y[1]);
 } /* void update(Graphics) endp */

public void paint(Graphics g)
 {
 update(g);
 } /* void paint(Graphics) endp */

public void addNotify()
 {
 super.addNotify();
 } /* void addNotify() endp */

public ODE()
 {
 Color zwart=new Color(0,0,0);

 setBounds(0,0,800,600);
 setBackground(zwart);
 } /* ODE() endc */

public static void main(String S[])
 {
 ODE myWin=new ODE();
```

```
 myWin.show();
 } /* static void main(String[]) endp */
} /* ODE endcss */
```

E. JAVA-programma voor het simuleren van het DDE systeem

```
import java.awt.*;
    import java.lang.Math;

    public class DDE extends Frame
     {
     int past=1001;
     double history[]=new double[past];

     double y[]=new double[2];
     double dydx[]=new double[2];
     double yout[]=new double[2];

     public void initHistory()
      {
      int i;

      for(i=0; i!=past; ++i)
       history[i]=0.0;
      } /* void initHistory() endp */

     public void updateHistory(double val)
      {
      int i,j;

      j=past-1;
      for(i=j; i!=0; --i)
       history[i]=history[i-1];
      history[0]=val;
      } /* void updateHistory(double) endp */

     public void derivs(double s[], double r[], double hist)
      {
      double alpha=(1.0/Math.sqrt(2.0))-1.0;
      double tau=2.22144;

      double A=-3.0;
      double B=2.0;
      double C=1.0*Math.exp(alpha*tau);
```

```
 double D=-1.0;

 s[0]=A*r[0]+B*r[1];
 s[1]=C*hist+D*r[1];
 } /* void derivs(double[],double[],double) endp */

public void rk4(double h, int lag)
 {
 int i;
 double hh,h6,hisHalf,hisHeel;
 double yt[]=new double[2];
 double k1[]=new double[2];
 double k2[]=new double[2];
 double k3[]=new double[2];
 double k4[]=new double[2];

 hh=h*0.5;
 h6=h/6.0;

/*
```

$y[i]$'s zijn de funktiewaarden op $t = x$.
$dydx[i]$'s zijn de afgeleiden op $t = x$.

We willen nu $y[i]$'s op $t = x + h$ weten en daarvoor zullen we gebruik maken van de funktiewaarden en afgeleiden op $t = x + \frac{1}{2}$ en op $t = x + 1$.
(De tijdstap is hier 1.)
De afgeleide $dydx[1]$ hangt af van een funktiewaarde uit het verleden; deze moeten we eerst uit het historyarray halen om ze mee te kunnen geven aan <void derivs(double[],double[],double)>.
De lag is als int meegegeven aan deze methode en dient nu als index voor het historyarray.

$history[0]$ is $y[0]$ op $t = x$.
We moeten de history hebben op:
$t = x + 1 - lag$ en
$t = x + \frac{1}{2} - lag$.
Deze laatste staat niet in het array en wordt als volgt berekend:
$f(x + \frac{1}{2} - lag) = \frac{f(x+1-lag)+f(x-lag)}{2}$.

```
*/

 hisHeel=history[lag-1];
 hisHalf=(hisHeel+history[lag])/2.0;

 for (i=0; i!=2; ++i)
  k1[i]=dydx[i];

 for (i=0; i!=2; ++i)
  yt[i]=y[i]+hh*k1[i];

 derivs(k2,yt,hisHalf);

 for (i=0; i!=2; ++i)
  yt[i]=y[i]+hh*k2[i];

 derivs(k3,yt,hisHalf);

 for (i=0; i!=2; ++i)
  yt[i]=y[i]+h*k3[i];

 derivs(k4,yt,hisHeel);

 for (i=0; i!=2; ++i)
  yout[i]=y[i]+h6*(k1[i]+2*k2[i]+2*k3[i]+k4[i]);

 derivs(dydx,yout,hisHeel);
 updateHistory(yout[0]);
 } /* void rk4(double,int) endp */

public void update(Graphics g)
 {
 int teller=0;
 int i,xOffs,yOffs;
 double time=0.0;
 double maxTime=24.0;
 double timeStep=0.01;
 Color colour1=new Color(200,200,0);
 Color colour2=new Color(0,200,200);

 g.setColor(colour2);
```

```
 g.drawLine(50,250,750,250);
 g.drawLine(50,450,750,450);
 g.drawLine(50,50,50,550);

 initHistory();
 g.setColor(colour1);
 y[0]=1.0; y[1]=0.0;
 history[0]=y[0];
 derivs(dydx,y,0.0);

 xOffs=50;
 while(time<maxTime)
  {
  rk4(timeStep,222);
  for(i=0; i!=2; ++i)
   y[i]=yout[i];

  if((teller%1)==0)
   {
   for(i=0; i!=2; ++i)
    {
    yOffs=(200*i+250)-(int)(100.0*y[i]);
    g.drawLine(xOffs,yOffs,xOffs+1,yOffs);
    }
   ++xOffs;
   }
  ++teller;
  time=time+timeStep;
  }
 System.out.println(y[0]/y[1]);
 } /* void update(Graphics) endp */

public void paint(Graphics g)
 {
 update(g);
 } /* void paint(Graphics) endp */

public void addNotify()
 {
 super.addNotify();
```

```
 } /* void addNotify() endp */

public DDE()
 {
 Color zwart=new Color(0,0,0);

 setBounds(0,0,800,600);
 setBackground(zwart);
 } /* DDE() endc */

public static void main(String S[])
 {
 DDE myWin=new DDE();
 myWin.show();
 } /* void main(String[]) endp */
} /* DDE endcss */
```

Literatuur

[1] Apostol, T.M. (1967) *Calculus, Volume I*
[2] Dennett, D.C. (1991) *Consciousness Explained*
[3] Djorghi, (1932) *Hypnotisme*
[4] Duschek, A.; Hochrainer, A. (1954) *Grundzüge Der Tensorrechnung In Analytischer Darstellung*
[5] Freud, S. (1917) *Inleiding Tot De Studie Der Psycho-analyse*; Oorspronkelijke titel: *Vorlesungen über die Psychoanalyse*
[6] Grossberg, S. (1988) *The Adaptive Brain I*
[7] d'Inverno, R.A. (1996) *Introducing Einstein's Relativity*
[8] Kim, J. (1996) *Philosophy Of Mind*
[9] Landau, E. (1930) *Grundlagen Der Analysis (Das Rechnen Mit Ganzen, Rationalen, Irrationalen, Komplexen Zahlen)*
[10] Nietzsche, F. (1885) *Also Sprach Zarathustra*
[11] Nietzsche, F. (1881/1882) *Die Fröliche Wissenschaft*