Patronen en golven

Vossiuspers AUP
Deze uitgave is tot stand gekomen onder auspiciën van de Universiteit van Amsterdam.

Omslag: Colorscan, Voorhout
Opmaak: Japes, Amsterdam
Foto omslag: Carmen Freudenthal, Amsterdam

ISBN 90 5629 114 9

© Vossiuspers AUP, Amsterdam, 2000

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voorzover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16B Auteurswet 1912 j° het Besluit van 20 juni 1974, St.b. 351, zoals gewijzigd bij het Besluit van 23 augustus 1985, St.b. 471 en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 882, 1180 AW Amstelveen). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) dient men zich tot de uitgever te wenden.

Patronen en golven

Rede

uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van
hoogleraar in de Wiskunde
aan de Universiteit van Amsterdam
op woensdag 27 oktober 1999

door

Arjen Doelman

Vossiuspers AUP

Dames en heren,

Wiskunde kan gezien worden als de wetenschap die 'patronen' en 'structuren' bestudeert.[1] Door het abstracte taalgebruik in de wiskunde is het voor de niet-ingewijde vaak bijna onmogelijk zich een beeld te vormen van de betekenis van deze 'patronen' of 'structuren'. In wiskundige termen is het onderwerp waar ik vandaag over zal spreken het gedrag van een zeker type van deze 'structuren' genaamd 'oplossingen van niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen'.[2] Deze structuren worden, vooral buiten de wiskunde, ook wel met de Engelse term 'patterns' aangeduid, inderdaad, patronen. De beste omschrijving, in algemene termen, van dit vakgebied is dan ook 'pattern formation': patroonvorming.

Pattern formation

Het bijzondere van dit onderzoeksgebied is, dat er verschillende disciplines in samenkomen en samenwerken. Het wiskundige begrip 'oplossing van een differentiaalvergelijking' kan hierdoor een zeer concrete betekenis hebben: het kan, in zekere zin, overal om ons heen worden waargenomen. Zelf vind ik het ontstaan van golfjes door een windvlaagje op een tot dat moment rimpelloos wateroppervlak, een regenplas of de Noordzee, een van de mooiste voorbeelden van het proces van 'pattern formation'. Eenieder die hiernaar kijkt en het proces probeert te begrijpen zal onder andere de volgende vragen kunnen stellen: waarom ontstaan deze golfjes? Welke factoren hebben invloed op de golflengte, de vorm en de hoogte van deze golfjes?

Dit zijn uiterst moeilijk te beantwoorden vragen voor de natuurkundige of wiskundige die een serieuze studie van dit proces wil maken. Deze wetenschapper zal eerst aan de hand van de fundamentele wetten van de stromingsleer een acceptabel

model moeten opstellen voor de interactie tussen wind en water, om zo het gedrag van de grenslaag, de waterspiegel, te beschrijven. Dit gebeurt met behulp van zo'n niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking. Als we nu even aannemen dat deze vergelijking vanuit natuurkundig en wiskundig oogpunt 'acceptabel' is – in beide gevallen raakt dit aan absoluut niet-triviale kwesties – dan kunnen we zeggen dat onze windgolfjes corresponderen met oplossingen van deze differentiaalvergelijking.

Het ontstaan van de windgolfjes kan nu worden onderzocht aan de hand van een zogenaamde stabiliteitsanalyse van de 'triviale' oplossing: het volledig rimpelloze wateroppervlak met een daaroverheen 'strijkende' gelijkmatige wind. Als alles meezit dan levert deze analyse een kritische windkracht op: waait de wind krachtiger dan deze kritische waarde, dan is het rimpelloze wateroppervak instabiel. Als gevolg hiervan zullen er langzaam groeiende periodieke oplossingen ontstaan: de windgolfjes.[3] Deze 'lokale' analyse geeft een mogelijk antwoord op de vraag naar het ontstaan van de golfjes en over de te verwachten golflengte. Echter, zodra men niet meer kan aannemen dat de golfjes 'heel klein' zijn, verliest deze aanpak zijn waarde.

Het is niet de bedoeling dat ik hier verder inga op het gedrag van windgolven, dit was slechts een eerste huis-tuin-en-keuken-voorbeeld van 'pattern formation'. Mijn tweede voorbeeld bevindt zich ook dicht bij huis, tot ongenoegen van velen: de tuinslak. Weinigen van u zullen wel eens de moeite hebben genomen om de patronen op het slakkenhuis te bestuderen. Vaak loopt er een aantal heel duidelijke gele strepen, afgewisseld door bruin/groene banden, over het slakkenhuis. Dit soort patronen zijn ook te vinden op schelpen. Hans Meinhardt laat in zijn boek *The Algorithmic Beauty of Sea Shells*[4] een aantal prachtige voorbeelden zien van schelpen met bijvoorbeeld zeer regelmatige, in wiskundige woorden: periodieke, streeppatronen. Andere schelpen zijn eerder 'geblokt' of overdekt met elkaar overlappende 'V-patronen'. Meinhardt modelleert de dynamica van de chemische stoffen die een rol spelen in het 'kleuren' van een schelp met, alweer, niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, dit keer van het reactie-diffusie-type. Computersimulaties van deze reactie-diffusievergelijkingen geven aan dat de oplossingen van deze vergelijkingen exact dezelfde patronen kunnen genereren als die men ziet op de schelp en de slak.

Vanuit het oogpunt van de wiskunde is er weinig verschil tussen de windgolfjes en de gestreepte slakkenhuizen. Sterker nog, de zojuist genoemde 'lokale analyse'

die het ontstaan van de windgolfjes verklaarde is in essentie dezelfde als de lineaire analyse waarmee de wiskundige Alan Turing rond 1950 het ontstaan van streep- en blokpatronen in 'biologische processen' meende te kunnen verklaren.[5] Ik zeg hier met klem 'meende te kunnen verklaren' omdat het tot op de dag van vandaag niet duidelijk is hoe belangrijk deze door natuurkundige wetten gedreven chemische processen zijn in biologische 'pattern formation'. Met andere woorden, er bestaat nog geen wetenschappelijke consensus over het belang van de niet-lineaire wiskunde en natuurkunde als één van de drijvende krachten achter de ontwikkeling van bijvoorbeeld een gestreepte tuinslak uit een oorspronkelijk homogenene bol cellen. Natuurlijk speelt de sturende werking van de genen een hoofdrol in dit proces, maar er zijn veel aanwijzingen dat de natuur hierin ook op een subtiele wijze gebruik maakt van de eigenschappen van niet-lineaire systemen.[6] Maar, ook dat is niet het onderwerp van vandaag. Deze twee voorbeelden dienden hoofdzakelijk om aan te geven dat vragen over volledig uiteenlopende 'patronen' uit het dagelijkse leven of in een wetenschappelijk experiment met behulp van die abstracte wiskundige 'taal' vaak terug te brengen zijn tot eenzelfde type probleemstelling. Dat geldt voor de windgolven, de slakkenhuizen maar bijvoorbeeld ook voor het ontstaan en de dynamica van zandbanken.[7,8]

Alan Turing's 'morphogenesis'

Om een indruk te krijgen van de wiskunde achter de zojuist getoonde patronen is het misschien het beste om een aantal opmerkingen over de geschiedenis van het vakgebied 'pattern formation' te maken.

Er is veel voor te zeggen om het artikel 'The chemical basis of morphogenesis' uit 1952 van de Engelse wiskundige Alan Turing[9] te kiezen als startpunt voor het ontstaan van dit vakgebied. Een belangrijke reden hiervoor is dat Alan Turing als een van de eersten het biologische begrip morfogenese als wiskundig probleem bestudeerde. Morphogenese betekent 'het ontstaan van vormen' ofwel 'pattern formation'. Turings verhaal was een van de eerste wiskundige artikelen waarin het begrip 'pattern formation', weliswaar onder een andere naam, centraal stond. Hierbij dient wel te worden opgemerkt dat de door Turing bestudeerde structuren al ruim tien jaar voor hem werden geanalyseerd door de mathematisch bioloog Nicolas Rashevsky.[10]

Een belangrijke reden om Turings artikel toch als startpunt voor het ontstaan van het vakgebied 'pattern formation' te kiezen is dat Turings analyse zeer dicht staat bij de tegenwoordige aanpak van dit soort problemen. Om deze reden is het wellicht goed om eens wat meer in te gaan op de inhoud van dit artikel.

Voor hierop in te gaan dient gezegd te worden dat Alan Turing natuurlijk niet bekend staat als wiskundig analyticus, laat staan als een toegepast analyticus. Turing is bekend om zijn fundamentele werk op het gebied van de wiskundige logica en als een van de belangrijkste krachten achter de ontwikkeling van wat wij tegenwoordig de computer noemen. Niet-wiskundigen kennen Alan Turing wellicht als de man die in de Tweede Wereldoorlog de Duitse 'Enigma code' brak en hiermee een belangrijke bijdrage leverde aan de verdediging van het Verenigd Koninkrijk. Echter, het laatste artikel dat Turing voor zijn zelfmoord in 1954 publiceerde had weinig te maken met deze achtergrond, maar werd gemotiveerd door zijn levenslange fascinatie voor de 'patronen' die je kunt waarnemen in planten en dieren.[11] Overigens, dit 'pattern formation'-artikel is vaker geciteerd dan het geheel van zijn overige wetenschappelijke werk tezamen.[12] Eerlijk gezegd betwijfel ik ten zeerste of dat ook betekent dat dit artikel beter gelezen wordt dan zijn andere werk.

Alan Turing poneerde in dit artikel het idee om 'pattern formation' in biochemische systemen te modelleren met behulp van, alweer, reactie-diffusievergelijkingen. Zo'n vergelijking beschrijft de evolutie van de concentraties van een aantal met elkaar reagerende chemische substanties die zich vrij door een zeker 'medium' kunnen verspreiden. Turing realiseerde zich dat de situatie waarin de reagerende stoffen homogeen verdeeld en in chemisch evenwicht zijn, instabiel kan zijn. Willekeurig kleine verstoringen kunnen dan gaan groeien, waardoor regelmatige patronen kunnen ontstaan. Deze patronen heten tegenwoordig 'Turing patterns'. Het ontstaan van deze regelmatige patronen gaat, in eerste instantie, tegen de intuïtie in. Turing toonde namelijk aan dat de instabiliteit, de drijvende kracht achter het ontstaan van de patronen, veroorzaakt wordt door de diffusie-effecten in de vergelijking. Je zou juist verwachten dat diffusie 'onregelmatigheden gladstrijkt' en dus patroonvorming tegenwerkt. Je kan hierbij denken aan een drupje melk in de thee. Onder invloed van diffusie verdeelt de melk zich op den duur geheel gelijkmatig oftewel homogeen door de thee. Hoe kan diffusie dan in Turings geval juist voor patroonvorming, en dus inhomogene verdelingen, zorgen? De sleutel hiertoe ligt in het feit dat Turing veronderstelde dat verschillende stoffen met verschillende snelheden kunnen diffunderen, hierdoor kunnen inhomogene verdelingen wel stabiel

zijn en kunnen ze ook worden waargenomen in een experiment. Wel dient te worden opgemerkt dat hier een veertig jaar lange speurtocht aan voorafging: pas in 1990 was er een expliciete chemische reactie ontdekt waarin op een overtuigende manier Turing patterns konden worden waargenomen.[13]

Turings aanpak was modern in de zin dat hij inzag dat het wiskundige verschijnsel 'bifurcatie' de drijvende kracht achter het ontstaan van interessante patronen kan zijn. Een ander, zeer belangrijk modern aspect van Turings werk is het feit dat hij de wiskundige analyse liet volgen door wat wij nu 'numerieke simulaties' zouden noemen. Aan de hand van, zoals hij schreef, '*a few hours of manual computation*' liet hij zien hoe de patroonvorming tot stand kwam. In de afsluitende paragraaf van het artikel voorspelt hij het belang van het gebruik van de toen nog nauwelijks bestaande *digital computers* voor de ontwikkeling van het vakgebied 'morfogenese'.

Deze voorspelling is volledig uitgekomen: onderzoek aan pattern formation kan tegenwoordig eigenlijk niet meer worden gedaan zonder het gebruik van de computer. Echter, Turing besprak in diezelfde paragraaf ook nog iets anders: het belang van niet-lineaire processen. Hij zegt: '*one cannot hope to have any very embracing theory of such processes*'. In de meest absolute vorm is dat nog steeds waar, ook ik heb weinig hoop op een 'definitieve' niet-lineaire theorie van 'pattern formation'. Aan de andere kant is er juist de laatste jaren op dit gebied veel gebeurd. De zogenaamde 'weakly nonlinear stability theory' kan met recht een algemeen geldende theorie voor pattern formation worden genoemd, weliswaar één met heel sterke beperkingen, maar daar kom ik zo meteen op terug.

De 'weakly nonlinear stability theory'

Men kan zeggen dat Lev Landau, één van de grootste natuurkundigen van deze eeuw, als één van de eersten het belangrijkste idee achter deze 'zwak niet-lineaire theorie' verwoordde. Hij merkte op dat een vloeistofstroming instabiel kon worden ten opzichte van periodieke verstoringen, of golven, en dat je in principe een vergelijking kon opstellen voor de evolutie van de amplitude van deze golven, als je aannam dat die amplitude 'klein genoeg' was.[14] Inderdaad, ook Landaus golven zijn wiskundig weer in essentie hetzelfde als Turings patronen. Landau formuleerde dit idee rond 1944, dus ruim voor Turings artikel. Ter verdediging van Turing moet worden opgemerkt dat, alhoewel zijn analyse volledig lineair was, hij zeker inzag

dat er iets als een zwak niet-lineaire aanpak mogelijk moest zijn. Ook hij schrijft een vergelijking op die de evolutie van de amplitude zou moeten bepalen en deze vergelijking komt exact overeen met die van Landau.

Landau besprak dit geval van 'pattern formation' in de context van een nog steeds grotendeels onbegrepen proces, dat van turbulentie, een verschijnsel dat zeker ook tot het vakgebied 'pattern formation' gerekend kan worden. Landau zag het ontstaan van de periodieke golf als eerste stap in een oneindig lange reeks van dit soort bifurcaties. Turbulentie zou het eindproduct hiervan zijn geweest. Dit idee werd in 1971 achterhaald door de inzichten van David Ruelle en Floris Takens.[15] Echter, het belang van de eerste stap in Landaus cascade werd hierdoor niet ondermijnd.

Landau en Turing formuleerden beiden eenzelfde vergelijking, een gewone niet-lineaire differentiaalvergelijking, maar geen van beiden gaf aan hoe je deze vergelijking vanuit het onderliggende systeem zou kunnen afleiden. Dat was een essentieel gemis, omdat het gedrag van de oplossingen van deze vergelijking, de periodieke golfjes, zeer sterk afhangt van de waarden van de coëfficiënten en deze worden bepaald door het onderliggende systeem.

Rond 1960 presenteerden de Britse toegepast wiskundigen Stuart en Watson als eersten een methode om deze vergelijking, tegenwoordig soms de Landau-Stuart-vergelijking genoemd, echt af te leiden uit het onderliggende systeem.[16] Zij deden dit onder de aanname dat de golflengte van de periodieke golven vastgelegd werd door de bifurcatie. Dit is een enorm sterke aanname, maar, impliciet was die ook gedaan door Landau en Turing. Overigens, tegenwoordig weten we dat de 'Landau-Turing bifurcatie' onder deze aanname eigenlijk niets anders is dan de zogenaamde Hopf-bifurcatie. De Landau-Stuart-vergelijking is dan het leidende deel van de bij deze bifurcatie horende normaalvorm.[17]

Er is echter geen enkele reden om aan te nemen dat de golflengte echt vastligt, al was dat maar omdat dit impliceert dat er geen interactie kan plaatsvinden tussen golven met verschillende golflengtes. Integendeel, Wiktor Eckhaus toonde rond 1962 aan dat golfjes met 'ongeveer, maar niet exact dezelfde' golflengte elkaar kunnen destabiliseren.[18] Praktisch gesproken betekent dat dat niet alle golfjes die de Landau-Stuart-theorie beschrijft stabiel zijn en dus ook werkelijk kunnen worden waargenomen.

De Ginzburg-Landau-vergelijking

In de periode 1969-1971 verschenen er, onafhankelijk van elkaar, vier artikelen waarin de juiste generalisatie van de Landau-Stuart-vergelijking werd afgeleid.[19] 'Generalisatie' in de zin dat nu ook de golflengte van de patronen niet langer 'kunstmatig' werd vastgehouden. Dit waren de auteurs, in alfabetische volgorde: DiPrima, Eckhaus, Newell, Segel, Stewartson, Stuart en Whitehead. De door hun afgeleide vergelijking, een niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking voor een complexwaardige functie, de amplitude, heet tegenwoordig de Ginzburg-Landau-vergelijking. Overigens, net als bij Landau werd in deze artikelen het ontstaan van 'patronen' in vloeistofstromingen bestudeerd. Twee hiervan[20] analyseerden het ontstaan van periodieke structuren in een convectieproces.[21] Convectie treed op als een laag vloeistof of gas van onderen af wordt verhit of aan de bovenzijde wordt afgekoeld. Nauwkeurige experimenten van convectieprocessen vormen nog steeds één van de belangrijkste bronnen voor de validatie en verdere ontwikkeling van een algemene theorie van 'pattern formation'.[22] Daarnaast hebben deze processen een duidelijke 'praktische' relevantie: ze bepalen voor een belangrijk deel de dynamica van de atmosfeer en oceanen.[23]

Het genoemde resultaat van Eckhaus over de stabiliteit van periodieke patronen of golven is vandaag de dag nog steeds een van de belangrijkste algemene resultaten over het gedrag van oplossingen van de Ginzburg-Landau-vergelijking.[24] Echter, Wiktor Eckhaus verkreeg dit resultaat dus zonder eerst de Ginzburg-Landau-vergelijking af te leiden, dat kwam pas zo'n vijf jaar later. Dit is zeker verwarrend en eigenlijk pas echt te begrijpen als je je verdiept in de details van deze theorie.[25]

Er bestaan wel meer van dit soort ogenschijnlijke inconsequenties in de geschiedenis van de 'weakly nonlinear stability theory'. De naam Ginzburg-Landau-vergelijking is namelijk eigenlijk onjuist. Er bestaan ook nog eens meerdere, verschillende, Ginzburg-Landau-vergelijkingen. Zover ik weet heeft bijvoorbeeld Ginzburg zich nooit met 'niet-lineaire stabiliteit' beziggehouden. Waarom dan toch de naam Ginzburg-Landau? In 1950 schreef Landau samen met Ginzburg een artikel over een bepaald type supergeleiders.[26] Hierin poneerden zij een systeem van gekoppelde vergelijkingen waarmee deze supergeleiders konden worden beschreven. Deze inzichten vormen nog steeds een basis van de moderne natuurkunde van dit type supergeleiders, maar inhoudelijk hebben ze geen relatie met de bovenstaande geschiedenis. Echter, er is een onderdeel van dit systeem van verge-

lijkingen dat lijkt op 'onze' Ginzburg-Landau-vergelijking. Waarschijnlijk omdat er geen duidelijk alternatief was, DiPrima-Eckhaus-Newell-Segel-Stewartson-Stuart-Whitehead-vergelijking is wat lang, en omdat Landau's naam al verbonden was met deze theorie, heeft men, na enige tijd, voor deze naam gekozen. Ik zei zojuist 'onze' Ginzburg-Landau-vergelijking, omdat er een tweede, stationaire, Ginzburg-Landau-vergelijking bestaat waarvan de oorsprong wel direct terug te voeren is tot het artikel van Ginzburg en Landau. Ook deze vergelijking staat de laatste jaren sterk in de aandacht van wiskundigen.[27]

Het duurde even voordat het fundamentele belang van de Ginzburg-Landau-vergelijking volledig werd geapprecieerd. Voor wiskundigen was de afleiding onduidelijk, zij zagen niet in hoe deze vergelijking überhaupt 'valide' kon zijn. Wiskundig was het namelijk niet duidelijk of deze vergelijking ook werkelijk kon doen waar hij voor was afgeleid: het beschrijven van het gedrag van de 'patronen' dicht bij de bifurcatiewaarde. Experimenteel was dit ondertussen uitgebreid bevestigd,[28] maar de wiskundige verklaring hiervoor ontbrak aanvankelijk volledig. Het probleem zat hem hierbij in de afleidingsprocedure: net als de Landau-Stuart-vergelijking is de Ginzburg-Landau-vergelijking het eerste orde stuk van een grotere vergelijking. Echter, anders dan bij de Landau-Stuart-vergelijking, bevat deze grotere vergelijking uiterst singuliere termen. De wiskundige moet aantonen dat deze termen geen 'echte bijdrage' kunnen leveren.

Rond 1990 kwam de doorbraak met artikelen van Pierre Collet en Jean-Pierre Eckmann, en Aart van Harten:[29] zij toonden voor versimpelde modelproblemen aan dat de Ginzburg-Landau-vergelijking een 'valide benadering' gaf.

Op dit moment, na bijna 10 jaar van actief onderzoek, is het validiteitsprobleem nog steeds niet in al zijn algemeenheid opgelost, maar je kan nu wel zeggen dat het hoe en het waarom van het succes van de Ginzburg-Landau-vergelijking grotendeels begrepen is.[30,31]

De beperkingen van de Landau-Turing-theorie

De 'weakly nonlinear stability theory' of Landau-Turing-theorie is onder zeer algemene omstandigheden toepasbaar – in biologische, scheikundige en natuurkundige systemen –, is bevestigd door experimenten en heeft een solide wiskundig fundament. Toch is deze theorie maar zeer beperkt bruikbaar en kan ze zeker niet de

plaats innemen van de '*embracing theory*' van Turing. De reden hiervoor schuilt in het woordje 'weakly'. Dit refereert aan het feit dat deze theorie alleen geldig is in systemen waarin het 'triviale patroon' slechts een klein beetje instabiel is. Als we aan de windgolfjes denken: de windkracht mag maar een heel klein beetje groter zijn dan de kritieke waarde waaronder het wateroppervlak gewoon glad blijft. Zodra de wind iets harder blaast is deze aanpak niet langer toepasbaar.

Zelfs als we alleen aan zuiver periodieke patronen denken, bijvoorbeeld die op de schelp, dan is er geen wiskundige theorie die deze strepen kan verklaren – in de context van het reactie-diffusie-model – zodra het systeem niet meer 'bijna-kritisch' is.[32]

Natuurlijk is dit bij een 'toepassing' pas een probleem als er ook andere 'patronen' worden waargenomen die niet 'geëxtrapoleerd' kunnen worden vanuit de Landau-Turing-limiet. Vanzelfsprekend is dit het geval: de zuiver periodieke patronen zijn uitzonderingen. Vandaag wil ik daarom aandacht besteden aan een zeer algemeen voorkomend verschijnsel, de zogenaamde 'defect patterns'. Ik merk hier wel bij op dat dit een keuze is: 'defect patterns' vormen maar een deel van het vakgebied 'pattern formation' en van mijn persoonlijke onderzoeksinteresses.

Een algemene theorie voor defect patterns?

In geïdealiseerde vorm zijn 'defects' singulariteiten in het onderliggende regelmatige patroon. Ook defects worden waargenomen in opmerkelijk veel verschillende contexten. In het algemeen kunnen ze niet met behulp van de Landau-Turing-theorie worden beschreven. Als we weer dicht bij huis beginnen: een prachtig voorbeeld van een defect pattern is de vingerafdruk. Het basispatroon bestaat uit parallelle maar gebogen lijnen, de vingerafdruk krijgt zijn eigen, unieke, identiteit door de 'defects', de verstoringen van het basispatroon.[33,34] 'Defect patterns' worden de laatste jaren in allerlei verschillende chemische reacties waargenomen.[35] Defects zijn bijna 'alomtegenwoordig' in de natuurkunde.[36] In dit kader mag het zeker niet onvermeld blijven dat er al jaren een goed ontwikkelde topologische theorie bestaat waarmee 'defects' in zogenaamde 'geordende systemen' beschreven en geclassificeerd kunnen worden.[37]

Echter, er is op dit moment geen wiskundige theorie voor het ontstaan, de stabiliteit en de dynamica van 'defects' in continue systemen. Er bestaat wel een vooralsnog formele theorie, die van de 'phase diffusion equation', waarmee defects bestudeerd kunnen worden.[38] Deze theorie is nog onvolledig, bijvoorbeeld in de zin dat er nog geen inzicht is in het karakter van de hogere orde termen. Anders dan in de Landau-Turing-theorie spelen deze juist een cruciale rol, vooral in de omgeving van een defect. Met andere woorden: dezelfde soort 'uiterst singuliere' termen die de wiskundige zoveel problemen gaf in de Landau-Turing-context, moeten in het geval van de 'phase diffusion-aanpak' veel beter bestudeerd en begrepen worden, vooral omdat ze in de omgeving van een defect niet langer verwaarloosd, of meer wiskundig: afgeschat, kunnen worden.[39] Vooralsnog kunnen er ook alleen nog maar stationaire defects met deze 'phase diffusion-methode' worden geanalyseerd. De opzienbare observaties van zich verplaatsende defects door het patroon op de rug van de koraalvis *Pomacanthus imperator*,[40] kunnen dus wiskundig niet beschreven, laat staan geanalyseerd worden, terwijl hetzelfde gedrag kan worden waargenomen in een eenvoudig reactie-diffusie-model. Ook kan deze theorie nog niet worden toegepast op defect patterns in systemen met 'voorkeursrichtingen', terwijl dat bijvoorbeeld bijna altijd het geval is in een morfodynamische context.[41]

Desalniettemin is het duidelijk dat de 'phase diffusion equation' wel de potentie heeft om een fundamentele rol, vergelijkbaar aan die van de Ginzburg-Landau-vergelijking, te gaan spelen in het onderzoeksgebied 'pattern formation'.[42]

Het is goed dat de 'phase difffusion-aanpak' deze mogelijkheden in zich heeft, want er bestaat een grote behoefte aan een wiskundig valide theorie die, net als de Landau-Turing-theorie, een tipje kan oplichten van de sluier die Turing's embracing theory van niet-lineaire processen voor ons verborgen houdt. Turing had absoluut gelijk toen hij het grote belang van de digital computer voorspelde voor dit onderzoeksgebied. Maar, en hierbij onderschrijf ik de woorden van Philip Holmes en John Lumley in hun recente boek over turbulentie,[43] '*hoewel numerieke simulaties zeer nuttige benaderingen leveren, geven ze in het algemeen weinig fundamenteel inzicht*'. Juist nu er meer en meer mogelijk is met de computer wordt het duidelijk hoe belangrijk fundamenteel inzicht is: de dynamica van patronen kan zo ingewikkeld zijn dat simulaties slechts verwarren. Er is behoefte, zeker ook vanuit het gezichtspunt van de 'toepassingen', aan een nieuw 'ijkpunt' voor de numerieke simulaties en de daarop gebaseerde theorievorming.

De wiskunde is bij uitstek geschikt om hier een fundamentele bijdrage aan te leveren.

Ik zou dit hier natuurlijk niet met zoveel nadruk zeggen als ik er niet van overtuigd was dat er ontwikkelingen gaande zijn in de wiskunde die ik in staat acht zo'n nieuw 'tipje van de sluier' op te lichten. Ik verwacht dat het op termijn, bijvoorbeeld, mogelijk is fundamenteel inzicht te krijgen in de dynamica van defects in reactie-diffusie-systemen.

Ook dit zal weer een lokale theorie zijn, net als de Landau-Turing-theorie. Echter, zoals de Landau-Turing-theorie 'lokaal' is in de zin dat de patronen zich dicht bij een 'triviaal patroon' bevinden – het rimpelloze wateroppervlak in het windgolfjes-voorbeeld – zal deze nieuwe theorie patronen beschrijven die zich, in zekere zin, dicht bij een zogenaamde solitaire golf bevinden.

Solitaire golven

Ik zal u niet meer gaan vermoeien met een uitgebreide beschrijving van dit wellicht enigszins onverwachte andere deelgebied van het vakgebied 'pattern formation'. Maar iets wil ik er toch nog wel over kwijt.

Allereerst: wat is dat, een solitaire golf? Het woord zegt het al, anders dan de golven waarover we tot nu toe hebben gesproken is dit een 'gelokaliseerd' verschijnsel. Als we weer aan watergolven denken, dan is bijvoorbeeld de uit zichzelf doorlopende boeggolf van een schip een solitaire golf. Deze golven komen de laatste tijd zelfs in het nieuws: het lijkt erop dat de nieuwe 'ultra-snelle' veerboot van de Stena-lijn die tussen Hoek van Holland en Harwich vaart op deze manier een soort 'solitonen' kan genereren. Deze solitaire golven hebben al flinke schade aangericht aan de Engelse kust en zijn hoogstwaarschijnlijk verantwoordelijk voor het overlijden van een Engelse visser. Wiskundig zijn het, waarschijnlijk, oplossingen van de zogenaamde Korteweg-de Vries-vergelijking.[44] Inderdaad, dat is de vergelijking waar het onderzoeksinstituut wiskunde van deze universiteit zijn naam aan te danken heeft: Diederik Johannes Korteweg was de eerste hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam, De Vries één van zijn promovendi.[45] Een bekend en belangrijk voorbeeld van een 'solitaire golf' in de biologie is het 'signaal' waarmee zenuwen bijvoorbeeld spieren aansturen. Dit proces kan gemodelleerd wor-

den als een stelsel van reactie-diffusievergelijkingen. Het signaal, een elektrische 'puls', wordt gerepresenteerd door een solitaire, lopende, golf-oplossing.[46]

Deze 'gelokaliseerde structuren' zijn in zekere zin eenvoudiger te bestuderen dan de volledig periodieke en dus niet-gelokaliseerde patronen. Ze corresponderen met zogenaamde homocliene of heterocliene oplossingen van gewone differentiaalvergelijkingen. Deze objecten zijn de laatste tientallen jaren uitvoerig bestudeerd en hoewel ook hier zeker geen definitieve embracing theory voor bestaat, zijn er een aantal zeer relevante situaties waarin de wiskunde een vrij goed beeld heeft van het bestaan en het gedrag van een dynamisch systeem in 'een omgeving' van zo'n homocliene baan. Het woord 'omgeving' heeft hier dan zowel betrekking op de fase-ruimte als de parameter-ruimte.[47,48,49]

Voordat je iets kan concluderen over de relevantie van zo'n homocliene baan als 'gelokaliseerd patroon' moet de stabiliteit van dit patroon als oplossing van de volledige niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking bestudeerd worden. Immers, alleen stabiele patronen kunnen worden waargenomen in de 'praktijk', in een experiment of in een numerieke simulatie. Ook de stabiliteitsanalyse van solitaire golven is vaak 'eenvoudiger' dan die voor periodieke patronen.[50] Dit betekent overigens niet dat deze stabiliteitsanalyse echt simpel is, integendeel. Zelfs in het meest versimpelde model voor de geleiding door een zenuw, de FitzHugh-Nagumo-vergelijking, was het lange tijd niet mogelijk om te laten zien dat de homocliene baan die de elektrische puls beschrijft ook werkelijk stabiel kon zijn. Chris Jones slaagde daar in 1984 in.[51] De soliton, de solitaire golf-oplossing van de Korteweg-de Vries-vergelijking, heeft zelfs bijna 100, om precies te zijn 99, jaar moeten wachten op het definitieve stabiliteitsresultaat van Robert Pego en Michael Weinstein in 1994.[52] Deze, en andere, bewijzen waren constructief, in de zin dat de stabiliteitstheorie voor 'gelokaliseerde patronen' zich mede door deze resultaten de laatste 15 jaar zeer sterk heeft kunnen ontwikkelen. Dit leidde, bijvoorbeeld, tot ontwikkeling van de zogenaamde 'stability index', een topologisch begrip dat gebruikt kan worden in algemene klasses van stabiliteitsproblemen.[53] Ook deze stabiliteitstheorie heeft uitermate geprofiteerd van de interactie met vragen uit biologische, scheikundige en natuurkundige toepassingen over concrete systemen.[54]

Solitaire golven, streeppatronen en defects

Maar wat hebben deze 'gelokaliseerde patronen' te maken met de voorgaande, duidelijk niet-gelokaliseerde patronen?

Het antwoord op deze vraag is aan de ene kant heel simpel, aan de andere kant ga ik ervan uit dat ik daar, samen met anderen, de komende jaren nog aan zal werken.

Hier is het 'simpele' antwoord: Vooral in reactie-diffusievergelijkingen hebben de streeppatronen in de dwarsdoorsnede opvallend vaak een structuur die lijkt op die van een groot aantal 'kopieën' van een solitaire golf.[55] Dit betekent dat men gebruik kan maken van de zojuist genoemde inzichten in 'de omgeving' van een homocliene baan.[56] Met behulp van de zeer recente inzichten van Robert Gardner[57] kan ook het stabiliteitsprobleem voor het periodieke, bijna-homocliene, patroon gekoppeld worden aan dat van de solitaire golf. Op deze manier kan het zo noodzakelijke fundamentele inzicht in het bestaan, de stabiliteit en de dynamica van 'streeppatronen' ontwikkeld worden.

Op basis hiervan kunnen, aan de hand van de ideeën die ten grondslag liggen aan de phase diffusion-methode, de singulariteiten, ofwel: de defects, in de streeppatronen worden geanalyseerd. Zo wordt het dus mogelijk om een wiskundige theorie voor al dan niet bewegende defect patterns vorm te geven.[58]

Er is nog veel werk te doen, maar zoals gezegd, ik verwacht dat aan de hand van al deze recente ontwikkelingen een nieuw venster kan worden geopend waardoor men iets minder verbaasd, maar nog even gefascineerd, kan kijken naar de dynamische wereld van 'pattern formation'.

De interactie tussen wiskunde en andere vakgebieden

Ik hoop dat ik er met deze schets van een aspect van het onderzoeksgebied 'pattern formation' tevens in geslaagd ben u duidelijk te maken dat de wiskunde het niet alleen af kan binnen dit vakgebied. De voorbeelden die ik u heb laten zien kunnen niet gezien worden als 'toepassingen' van een bestaande, of wellicht nog in ontwikkeling zijnde, wiskundige theorie. Het is waarschijnlijk niet overdreven te stellen dat alle wiskunde waar ik het vandaag over heb gehad, niet zou hebben bestaan zon-

der de vragen die geformuleerd werden in bijvoorbeeld de biologische, of hydrodynamische context.

Ik sluit mij in dit kader volledig aan bij mijn collega Peter Sloot die in zijn rede dit voorjaar stelde: '*Het is juist een gezonde combinatie van theorie, experiment en simulatie die ons verder helpt de natuur te doorgronden*'.[59] Natuurlijk heb ik, bij het verhaal van zojuist, de wiskundige, theoretische, aspecten van het onderzoeksgebied benadrukt. Dat is, naar mijn mening, één van de belangrijkste 'functies' van de wiskunde binnen het vakgebied pattern formation, en misschien wel van toegepaste wiskunde in het algemeen: het 'distilleren' van relevante wiskundige vragen uit de veelheid van fenomenen die worden waargenomen, om aan de hand daarvan een theorie op te stellen die de oorspronkelijke motivatie overstijgt. Met 'overstijgen' bedoel ik dat er sprake zal zijn van een algemene geldigheid, zoals bijvoorbeeld duidelijk het geval is bij de Landau-Turing-theorie: deze theorie is toepasbaar ver buiten de oorspronkelijke probleemstellingen waar Landau en Turing aan dachten.

Echter, er schuilt hierin een gevaar, en ik haal hiervoor de woorden aan van Giovanni Seminara, in de inleiding van een overzichtsartikel over rivier-morfodynamica: '*The applied mathematician is then warned that it is dangerous to build skyscrapers on weak foundations.*'[60] En dat is inderdaad een reëel gevaar: zonder op z'n minst voor een gedeelte van de onderzoekstijd aan concrete 'toegepaste' vragen te werken loopt de wiskundige de kans dat hij of zij zich gaat bezighouden met het ontwikkelen van wiskundige bouwwerken die nauwelijks relevant zijn vanuit het standpunt van een 'toepassingsgebied'. Let wel, dit werk kan van zeer hoog wiskundig kaliber zijn en dus vanuit wiskundig oogpunt juist uiterst relevant zijn. Dit is vanzelfsprekend ook een subjectieve kwestie: van veel van de vandaag besproken wiskunde kan gezegd worden dat het in deze categorie thuishoort. Dat neemt niet weg dat het, naar mijn mening, van essentieel belang is voor een wiskundige die aan 'pattern formation' werkt om ook aan concrete 'toegepaste' projecten te werken: de wiskunde alleen geeft, over het algemeen, een te geïdealiseerd beeld van het vakgebied. Het is dan wel noodzakelijk dat de wiskundige nauw samenwerkt met één of meerdere collega's met andere specialisaties. In zo'n samenwerking kunnen theorie, simulatie en praktijk samenkomen om 'de natuur te doorgronden'. Deze samenwerking zal, zonder twijfel, ook nieuwe wiskundige inzichten opleveren, het komt in mijn ervaring hoogst zelden voor dat er gebruik gemaakt kan worden van 'pasklare' wiskunde.

Voor ik de overstap maak naar een ander onderwerp wil ik nog kort de veelgehoorde uitspraak '*de twintigste eeuw was de eeuw van de natuurkunde, de eenentwintigste eeuw wordt de eeuw van de biologie*'[61] aanhalen. Ik ga liever niet in op de vraag of dit wel zo is, of, of je überhaupt wel zo'n uitspraak kan doen. Ik hoop dat ik met het verhaal over 'patterns' heb aangetoond dat er voor de wiskunde, ook in dit licht, voldoende reden is om optimistisch te zijn over de toekomst: het belang van de wiskunde in de wetenschapsbeoefening zal de komende eeuw waarschijnlijk alleen maar groter worden.

De wiskunde in Nederland

Gewapend met dit optimisme kan ik de overstap maken naar de problemen rond de wiskunde, of meer in het algemeen de 'harde' bèta-wetenschappen, in Nederland. Er is sprake van een bijna paradoxale situatie. Aan de ene kant staat de schrikbarend lage instroom van wiskundestudenten aan de Nederlandse universiteiten. Dit is al enige jaren geen nieuws meer en het ziet er ook niet naar uit dat hier op de korte termijn verandering in zal komen.[62] Aan de andere kant staat het zojuist geconstateerde, en alom geaccepteerde, groeiende belang van de wetenschap wiskunde als, op zijn minst, ondersteunende discipline in een toenemend aantal gebieden,[63] en, laten we dat niet vergeten, de sterke ontwikkeling die de wiskunde zelf doormaakt. Tevens is daar het maatschappelijke probleem van het steeds nijpender wordende tekort aan wiskunde-docenten op middelbare scholen.[64] En er is meer aan de hand: tegenover een zekere dreiging van al of niet opgelegde reorganisaties of samenvoegingen van universitaire wiskunde-instituten[65] staat de constatering dat er de komende tien jaar zoveel vacatures zullen ontstaan aan deze instituten[66] dat het de vraag is of er wel voldoende capabele kandidaten zullen zijn om de opengevallen posities in te nemen. Het niet opvullen van een structureel gedeelte van deze posities is geen serieuze optie, al was het alleen maar omdat het aantal onderwijstaken de laatste jaren eerder toe- dan afgenomen is, en dat het onwaarschijnlijk is dat deze tendens zal omslaan in de komende tijd.

Er wordt door allerlei instanties nagedacht over de problematiek rond de 'harde' bèta-vakken. Zoals ik al zei: dit alles is al enige jaren geen nieuws meer. Maar, dat doet natuurlijk niets af aan de relevantie van deze uiterst gecompliceerde kwestie voor de wiskunde in Nederland. Ik wil hier alleen kort ingaan op één van de

aspecten van deze kwestie, omdat ik denk dat het belang hiervan door velen sterk onderschat wordt. Ik hecht er ook persoonlijk veel waarde aan, zoals, naar ik hoop, deze rede al enigszins duidelijk heeft gemaakt. Ik doel hier op het universitaire wiskunde-onderwijs als service-onderwijs voor andere opleidingen, en kan hiervoor letterlijk een advies oplezen uit de recent verschenen verkenning *De toekomst van het wiskunde-onderzoek in Nederland* van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen: '*Het service-onderwijs wiskunde dient te worden gegeven door wiskundigen die bij het wiskunde-onderzoek betrokken zijn*.'[67]

De verleiding bestaat om het hierbij te laten: duidelijker kan het niet gezegd worden. Ik hoop dat ik ook met deze rede ondersteuning heb gegeven voor één van de belangrijkste argumenten voor dit advies. Anders dan de meeste mensen denken is wiskunde een uiterst dynamisch vak,[68] dit geldt in het bijzonder voor de wiskunde die in contact staat met andere disciplines. Juist nu het belang van dit vak in allerlei vakgebieden zo sterk toeneemt, kan en mag je het, bij opleidingen op universitair niveau, niet in z'n geheel overlaten aan docenten die niet op de een of andere wijze een band hebben met deze onderzoeksdynamica.

In dit kader is het dan ook bijvoorbeeld uiterst betreurenswaardig dat het nog steeds voorkomt aan Nederlandse universiteiten dat faculteiten op louter financiële gronden besluiten om zelf het wiskunde-onderwijs te gaan verzorgen.

Dames en heren studenten,

Degenen onder u die wiskunde studeren, zal bij het lezen van de krant soms het gevoel bekruipen dat u tot een uitstervend ras behoort. Zoals u zelf maar al te goed weet is daar natuurlijk absoluut geen sprake van. De zojuist genoemde problematiek wordt soms zo vervormd, dat het lijkt dat u per persoon zou moeten kunnen beschikken over u eigen privé-hoogleraar, of deze hoogstens met één of twee medestudenten moet delen.[69] Toch lijkt het er soms op dat u, net als de meeste studenten die wiskunde-colleges volgen, uw mogelijke invloed op het door u genoten onderwijs onderschat. Dit is overigens niet iets van de laatste tijd. Lesgeven in de wiskunde is een van de mooiste aspecten van mijn aanstelling aan deze universiteit, meer directe interactie met u als 'afnemers' zal mijn en, naar ik verwacht, uw plezier alleen maar vergroten.

Op deze manier ben ik bij het afsluitende deel van deze rede aangekomen.

Dankwoord

Ik bedank het College van Bestuur voor het vertrouwen dat zij in mij hebben gesteld.

Beste collega's van het Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde,

Het is een waar genoegen in uw midden te mogen werken. Als het afgelopen jaar gezien kan worden als een blauwdruk voor de komende jaren, dan ziet het ernaar uit dat ik me niet snel zal gaan vervelen. Gelukkig maar.

Beste promovendi,

en in het bijzonder diegenen onder u die hun promotie-onderzoek mede onder mijn begeleiding hebben gedaan, aan het doen zijn, of zullen gaan doen. In dit soort situaties lees of hoor je altijd hoeveel de begeleider zelf heeft geprofiteerd van de wisselwerking met jullie. Ik heb dat, als promovendus, altijd sterk betwijfeld. Maar, ik kan u garanderen dat het waar is. Ook in de wiskunde steunt het onderzoek voor een groot deel op het werk van jullie. Ik kan zonder aarzeling stellen dat jullie invloed op mijn onderzoek verder gaat dan de directe samenwerking in de voorgeschreven vier jaar: jullie ideeën en enthousiasme stimuleren het geheel van mijn wetenschappelijke activiteiten.

Zeergeleerde De Swart en zeergeleerde Maas, beste Huib en Leo,

Ik heb in deze rede aangegeven hoe belangrijk en inspirerend ik een directe wisselwerking tussen de wiskunde en andere vakgebieden vind. Ik denk dat mijn, voor sommigen wellicht wat optimistische, ideeën hierover zeer sterk zijn beïnvloed door het feit dat jullie daar zo'n grote rol in hebben gespeeld. Ik hecht grote waarde aan de vriendschap die is ontstaan en zie deze als fundament voor nog vele jaren opwindende en soms wellicht ook enigszins verwarrende discussies, hier in Amsterdam, in Utrecht op het Instituut van Marien en Atmosferisch Onderzoek, op Texel, bij het Nederlands Instituut voor Onderzoek der Zee, of waar dan ook ter wereld.

Philip Holmes, Tasso Kaper en Robert Gardner hebben een belangrijke invloed gehad op mijn wiskundige ontwikkeling, echter, de basis hiervoor is gelegd door een van de hoofdrolspelers in het zojuist vertelde verhaal.

Hooggeleerde Eckhaus, beste Wiktor,

De wiskundige intuïtie is misschien wel het allerbelangrijkste 'gereedschap' van de wiskundig onderzoeker. Ik dank je met name omdat ik denk dat ik deze voor een belangrijk gedeelte te danken heb aan mijn omgang met jou. Vooral jouw nadruk op het ontwikkelen van een persoonlijke, onafhankelijke, voor sommigen wellicht eigenwijze, kijk op zaken heeft mij tot ver buiten de wetenschapsbeoefening beïnvloed.

Op deze manier eindigt deze rede buiten de wetenschap.

Lieve Jeannine, Ward, Stijn, ouders, familie en vrienden,

Het kunnen werken aan en genieten van al deze patronen, golven en wiskunde is slechts een zeer klein aspect van alles wat ik aan jullie te danken heb.

Geachte toehoorders,

Ik dank u voor uw aandacht.

Ik heb gezegd.

Noten

1 Zie bijvoorbeeld de recente uitgave *Wiskunde. Wetenschap van patronen en structuren* van K. Devlin (Beek: *Natuur en Techniek*, 1998), vertaald door Jan van der Craats.

2 Precieser: oplossingen van parabolische partiële differentiaalvergelijkingen die gedefinieerd zijn op onbegrensde, cilindervormige gebieden. 'Praktisch' betekent dit dat de grootte-orde van de patronen veel kleiner is dan die van het domein waarop deze 'patterns' worden waargenomen. Dit impliceert ook dat de randvoorwaarden geen beslissende invloed hebben op de structuur en stabiliteit van de 'patterns'.

3 Deze aanpak van het 'windgolfjesprobleem' is gekozen in 'On the generation of waves by wind' van P.J. Blennerhassett, *Proc. Roy. Soc. London A*, 298, pp. 451-494 (1980).

4 H. Meinhardt baseerde dit op een algemeen lezerspubliek gerichte boek (Springer Verlag, 1995) op resultaten van zo'n twintig jaar onderzoek (van hem en vele anderen, onder wie A. Gierer) op het gebied van biologische 'pattern formation'.

5 A. Turing, 'The chemical basis of morphogenesis', *Phil. Trans. Roy. Soc. London B*, 237, pp. 37-72 (1952).

6 Dat de wiskunde een belangrijke rol speelt in de biologie wordt op een zeer overtuigende wijze betoogd door Ian Stewart in *Life's Other Secret* (Penguin Press, 1998). De wisselwerking tussen de genen en natuurkundige/wiskundige processen wordt hierin ook uitgebreid bediscussieerd.

7 Zie het proefschrift van Ralph Schielen, *Nonlinear Stability Analysis and Pattern Formation in Morphological Models* (Utrecht, 1995), voor de analyse van zandbanken in rivieren.

8 Zandbanken in zeegaten worden bestudeerd in Henk Schuttelaars' proefschrift *Evolution and Stability Analysis of Bottom Patterns in Tidal Embayments* (Utrecht, 1997). Merk op dat het wiskundige karakter van dit probleem door de aanwezigheid van getij a priori heel anders is dan voor rivieren.

9 Zie noot 5.

10 Zie deel I van *Mathematical Biophysics. Physico-Mathematical Foundations of Biology* (2 delen) van N. Rasheski, eerste editie 1938, heruitgegeven in 1960 door Dover Publications.

11 Zie de biografie *Alan Turing – The Enigma* van A. Hodges (Burnett Books, 1983).

12 Zie de inleiding in deel IV van Turings Collected Works, *Morphogenesis* (Elsevier, 1992) door P.T. Saunders.

13 'On the problem of turbulence', artikel 52 in *The Collected Papers of Landau*, D. ter Haar, editor (Pergamon, 1965), oorspronkelijk verschenen in C. R. *Acad. Sc. URSS*, 44, 1944.

14 Zie V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade en P. de Kepper, 'Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern', *Phys. Rev. Lett.*, 64, pp. 2953–2956 (1990), en voor meer achtergrondinformatie J. Boissonade, E. Dulos en P. de Kepper, 'Turing patterns: from myth to reality', pp. 221–268 in *Chemical Waves and*

Patterns, R. Kapral en K. Showalter (eds) (Kluwer, 1995). Na deze ontdekking heeft het scheikundig onderzoek aan 'pattern formation' een grote vlucht genomen, zie bijvoorbeeld ook A. de Wit, 'Spatial patterns and spatiotemporal dynamics in chemical systems', *Adv. Chem. Phys.*, 109, pp. 435–513 (1999).

15 D. Ruelle en F. Takens, 'On the nature of turbulence', *Comm. Math. Phys.*, 20, pp. 167–192 (1971).

16 In 2 bij elkaar horende artikelen:
– J.T. Stuart 'On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. I: The basic behaviour in plane Poiseuille flow', *J. Fluid Dyn.*, 9, pp. 353–370, (1960);
– J. Watson, 'On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. II: The development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow', *J. Fluid Mech.*, 9, pp. 371–389 (1960).

17 Zie bijvoorbeeld J. E. Marsden en M. McCracken, 'The Hopf Bifurcation and its Applications', *Applied Mathematical Sciences,* 19, Springer (1976).

18 Zie W. Eckhaus, 'Studies in Non-Linear Stability Theory, Springer Tracts' in *Natural Philosophy* 6 (1965). De resultaten waren gebaseerd op drie artikelen:
– W. Eckhaus, 'Problèmes non linéaires dans la théorie de la stabilité', *J. Mécanique*, 1, pp. 49–77 (1962);
– W. Eckhaus, 'Problèmes non linéaires de stabilité dans un espace à deux dimensions. I: Solutions périodiques', *J. Mécanique*, 1, pp. 413–438 (1962);
– W. Eckhaus, 'Problèmes non linéaires de stabilité dans un espace à deux dimensions. II: Stabilité des solutions périodiques', *J. Mécanique*, 2, pp. 153–172 (1963).

19 – L.A. Segel, 'Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection', *J. Fluid Mech.*, 38, pp. 203–224 (1969).
– A.C. Newell en J.A. Whitehead, 'Finite bandwidth, finite amplitude convection' *J. Fluid Mech.*, 38, pp. 279–304 (1969);
– K. Stewartson en J.T. Stuart, 'A non-linear instability theory for a wave system in plan Poiseuille flow', *J. Fluid Mech.*, 48, pp. 529–545 (1971);
– R.C. DiPrima, W. Eckhaus en L.A. Segel, 'Non-linear wave-number interaction in near-critical two-dimensional flows', *J. Fluid Mech.*, 49, pp. 705–744 (1971).

20 De artikelen van Segel, en Newel en Whitehead.

21 Opgemerkt dient te worden dat deze artikelen het (zwak) niet-lineaire karakter van een convectieprobleem bestudeerden. Lord Rayleigh bestudeerde al in 1916 de lineaire aspecten van het ontstaan van convectie-patronen in 'On convective currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side', *Philos. Mag.*, 32, pp. 529-546 (1916).

22 Zie bijvoorbeeld P.G. Drazin en W.H. Reid, *Hydrodynamic Stability* (Cambridge University Press, 1981).

23 Het is tevens een voorbeeld van een aan beide kanten opmerkelijk vruchtbare wisselwerking tussen de wiskunde en 'een toepassing'. De meteoroloog E.N. Lorenz leidde in 'Deterministic, non-periodic flow', *J. Atmos. Sc.*, 20 , pp. 130-141 (1963), een zeer grove benadering af van een volledig niet-lineair convectieproces: een drie-dimensionaal systeem dat nu bekend staat als het Lorenz-systeem. Lorenz laat hierin tevens, met behulp van computersimulaties, zien dat dit systeem een zogenaamde 'chaotische attractor' kan hebben. Dit is één van de eerste voorbeelden van een (continu) dynamisch systeem met 'chaotisch' gedrag en is daarom zeer belangrijk geweest voor de ontwikkeling van de theorie van dynamische systemen.

24 Voor de Ginzburg-Landau-vergelijking als evolutievergelijking op een onbegrensd gebied, zie noot 27.

25 In dit kader is het opvallend om te constateren dat de (zeer recente) rigoreuze bewijzen van het zogenaamde 'Eckhaus instability criterion' in algemene 'bijna-kritische' systemen ook weer geen expliciet gebruik maken van de Ginzburg-Landau-benadering. Zie G. Schneider, 'Nonlinear stability of Taylor vortices in infinite cylinders', *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 144, pp. 121–200 (1998).

26 'On the theory of superconductivity' door V.L. Ginzburg en L.D. Landau, artikel 73 in *The Collected Papers of Landau*, zie noot 13, oorspronkelijk verschenen in *JETP*, 20, 1950.

27 Veel van hetgeen bekend is over de oplossingen van de stationaire (en dus elliptische) reële Ginzburg-Landau-vergelijking op begrensde gebieden is te vinden in *Ginzburg-Landau Vortices* van F. Bethuel, H. Brezis en F. Hélein (Birkhäuser, 1994). 'Reëel' refereert hier aan de coëfficiënten van de vergelijking, als gevolg hiervan heeft de vergelijking een variationale structuur. De Ginzburg-Landau-vergelijking die afgeleid wordt in de 'weakly nonlinear stability theory' heeft in het algemeen complexe coëfficiënten (en dus geen variationele structuur).

28 Zie noot 22.

29 – P. Collet en J.-P. Eckmann, 'The time-dependent amplitude equation for the Swift-Hohenberg problem', *Comm. Math. Phys.*, 132, pp. 139–153 (1990);
– A. van Harten, 'On the validity of the Ginzburg-Landau's equation', *J. Nonlinear Sc.*, 1, pp. 397–422 (1991).

30 Zie G. Schneider, 'Global existence via Ginzburg-Landau formalism and pseudo-orbits of the Ginzburg-Landau approximations', *Comm. Math. Phys.*, 164, 159–179 (1994), en de referenties in dit artikel, om een indruk te krijgen van de aard en algemeenheid van de validiteitsresultaten .

31 Daarentegen is er bijvoorbeeld nog onvoldoende inzicht in het karakter van de modulatievergelijking, en dus ook de validiteit, in de omgeving van co-dimensie 2 punten. Zie bijvoorbeeld het proefschrift *Co-dimension 2 Phenomena in Pattern Formation* (Utrecht, 1998) van Vivi Rottschäfer.

32 Alleen al het wiskundige existentieprobleem vertaalt zich in het simpelste geval in het probleem van het vinden van een periodieke baan in een gewone differentiaalvergelijking,

meestal van dimensie vier of meer. Zelfs voor twee-dimensionale systemen, waar het probleem topologisch gezien significant eenvoudiger is, is dit in z'n algemeenheid een onopgelost probleem. Als men zich wederom beperkt tot polynominale vectorvelden is er veel bekend, maar is het zeker niet opgelost. Het staat in deze vorm bekend als nummer 16 van de 23 in het jaar 1900 door David Hilbert geformuleerde 'toekomstige problemen van de wiskunde'. In de gevallen dat er wel een existentieresultaat bestaat levert de stabiliteitsanalyse in het algemeen onoverkomelijke problemen op (behalve in een heel klein aantal modelproblemen, zoals de complexe Swift-Hohenberg-vergelijking, zie de artikelen genoemd bij noot 38).

33 Zie Hoofdstuk 17 in *Mathematical Biology* van J.D. Murray, Springer Biomathematics Texts, 19 (1989), voor een 'mechano-chemisch mechanisme' dat het ontstaan van dit soort 'dermatoglyfische patronen' modelleert (de relevante bifurcatie is weer van het Landau-Turing-type).

34 De 'topologie' van defects in vingerafdruk-patronen wordt op een zeer leesbare manier beschreven door R. Penrose in 'The topology of ridge systems', *Ann. Hum. Genet.*, *Lond.*, 42, pp. 435–444 (1979).

35 Zie de twee laatste artikelen in noot 14.

36 Zie bijvoorbeeld de volgende twee review-artikelen voor een opsomming:
– N. D. Mermin, 'The topological theory of defects in ordered media', *Rev. Modern Phys.*, 51, pp. 591–647 (1979);
– A.C. Newell, T. Passot en J. Lega, 'Order parameter equations for patterns', *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 25, pp. 399–453 (1993).

37 Zie het artikel van Mermin bij noot 36.

38 Zie onder andere het artikel van Newell et al. bij noot 36 en:
– T. Passot, A.C. Newell, 'Towards a universal theory for natural patterns', *Physica D*, 74, pp. 301-352 (1994);
– N. Ercolani, A.C. Newell, en T. Passot, 'The geometry of the phase diffusion equation', te verschijnen in *J. Nonlinear Sc.* (1999).

39 De diffusie-coëfficiënt van de phase diffusion-vergelijking verandert van teken in de omgeving van een defect. Hogere, vierde orde, afgeleiden zijn dan noodzakelijk om het gedrag van de oplossingen in de omgeving van een defect te reguleren (deze termen zijn wel 'klein' buiten de directe omgeving van een defect). Echter, vooralsnog worden deze vierde orde afgeleiden 'met de hand' toegevoegd, i.e. ze worden niet afgeleid uit het onderliggende systeem. Verder is deze theorie bijvoorbeeld gebaseerd op het uitgangspunt dat men een volledig (kwalitatief en kwantitatief) inzicht heeft in het gelineariseerde stabiliteitsprobleem rond het periodieke basispatroon, hetgeen zeer zelden het geval is, zie noot 32. Juist om die reden is men er nog niet in geslaagd een goed inzicht in het gedrag van de hogere orde termen te krijgen.

40 Zie S. Kondo, R. Asai, 'A reaction-diffusion wave on the skin of the marine angelfish *Pomacanthus*', *Nature*, 376, pp. 765–768 (1995).

41 De 'phase diffusion-aanpak' neemt aan dat het systeem invariant is onder translaties en orthogonale transformaties. Deze laatste symmetrie wordt bijvoorbeeld verbroken, zodra er sprake is van een 'netto-transport' in een zekere richting. In morfodynamische systemen wordt dit 'netto-transport' bijvoorbeeld veroorzaakt door de getijdestroom.

42 Zie het artikel van Ercolani et al. in noot 38.

43 P. Holmes, J.L. Lumley en G. Berkooz, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry* (Cambridge University Press, 1996).

44 Zie het artikel 'Solitary killers', pp. 18-19 in de *New Scientist* van 28 augustus 1999. Er is nog geen solide basis voor het geponeerde soliton-karakter van deze golven, echter, het gedrag van deze golven lijkt sterk op dat van 'tsunami's', solitaire golven veroorzaakt door zeebevingen. Tsunami's kunnen gemodelleerd worden als soliton-oplossingen van een Korteweg-de Vries-vergelijking.

45 Zie de web-site 'http://turing.wins.uva.nl/~janwieg/korteweg/index.html' voor uitgebreide informatie over Korteweg en de Korteweg-de Vries-vergelijking.

46 Het meest eenvoudige model hiervoor is de FitzHugh-Nagumo-vergelijking, een simplificatie van de zogenaamde Hodgkin-Huxley-vergelijkingen, zie:
– R. FitzHugh, 'Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrames', *Biophys. J*, 1, pp. 445-466 (1961);
– J. Nagumo, S. Arimoto en S. Yoshizawa, 'An active pulse transmission line simulating nerve axons', *Proc IRL*, 50, pp. 2061-2070 (1960).

47 Een standaard-, maar natuurlijk ondertussen enigszins verouderd tekstboek, waarin een aantal fundamentele voorbeelden van globale bifurcaties (i.e. het gedrag in de omgeving van een homocliene baan) aan de orde komen is *Nonlinear Oscillations*, *Dynamical Systems*, and *Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences 42 (Springer, 1983) van J. Guckenheimer en P. Holmes.

48 Vooral als het vectorveld een zogenaamde 'slow-fast-structuur' heeft is de 'geometric singular perturbation theory' een sterk 'gereedschap' waarmee homocliene en bijna-homocliene structuren kunnen worden bestudeerd, zie C.K.R.T. Jones, 'Geometric Singular Perturbation Theory', in *Dynamical systems*, *Montecatibi Terme*, 1994, *Lecture Notes in Mathematics 1609*, R. Johnson (ed.) (Springer, 1995). In combinatie met hoofdzakelijk topologische argumenten kan dan een zeer expliciet beeld van de enorme rijkdom aan dit soort structuren worden verkregen, zie bijvoorbeeld G. Hek, A. Doelman en P. Holmes, 'Homoclinic saddle-node bifurcations and subshifts in a three-dimensional flow', *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 145, pp. 291–329 (1998).

49 Het is wellicht passend om hier op te merken dat in de weinige gevallen dat een verschijnsel als 'chaos' in een continu dynamisch systeem als wiskundig fenomeen kan worden begrepen dat bijna zonder uitzondering gaat in termen van (verstoorde) homocliene of heterocliene connecties, zie bijvoorbeeld het boek van Guckenheimer en Holmes bij noot 47.

50 Het gelineariseerde stabiliteitsprobleem reduceert tot een lineaire vergelijking met constante coëfficiënten op plus of min oneindig. Als gevolg hiervan valt het spectrum in para-

bolische systemen (onder zekere voorwaarden) uiteen in een eenvoudig te controleren 'continu' stuk en een eindig aantal discrete eigenwaarden. Zie bijvoorbeeld D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations,* Lecture Notes in Mathematics 840 (Springer, 1981).

51 C.K.R.T. Jones, 'Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system', *Trans. AMS*, 286, pp. 431–469 (1984).

52 R.L. Pego, M.I. Weinstein, 'Asymptotic stability of solitary waves', *Comm. Math. Phys.*, 164, pp. 305–349 (1994). Het artikel van D.J. Korteweg en G. de Vries, 'On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and a new type of long staionary waves', verscheen in 1895 (in *Philos. Mag.*, 39, pp. 422–443).

53 J. Alexander, R. A. Gardner en C.K.R.T. Jones, 'A topological invariant arising in the stability of traveling waves', *J. Reine Angew. Math.*, 410, pp. 167–212 (1990).

54 Zie bijvoorbeeld:
– T. Kapitula en B. Sandstede, 'Stability of bright solitary-wave solutions to perturbed nonlinear Schrödinger equations', *Physica D* 124 pp. 58–103 (1998).
– A. Doelman, R.A. Gardner en T.J. Kaper, 'A stability index analysis of 1-D patterns of the Gray-Scott model' (1998).

55 Zie bijvoorbeeld:
– A. Doelman, T.J. Kaper en P. Zegeling, 'Pattern formation in the one-dimensional Gray-Scott model', *Nonlinearity*, 10, pp. 523–563 (1997);
– W.-M. Ni, 'Diffusion, cross-diffusion, and their spike-layer steady states', *Notices AMS*, 45, pp. 9–18 (1998).

56 Een belangrijk voorbeeld is natuurlijk het bestaan van periodieke banen met een 'bijna-homocliene' structuur bij een Silnikov bifurcatie, zie noot 47. Als het systeem singulier gestoord is bestaan er ook vele andere periodieke banen van dit type, zie bijvoorbeeld het eerste artikel bij noot 55.

57 R. A. Gardner, 'Spectral analysis of long wavelength periodic waves and applications', *J. Reine Angew. Math.*, 491 pp. 149–181 (1997).

58 Tot nu toe is de 'phase diffusion-aanpak' alleen toegepast op systemen met een variationele structuur. Deze structuur wordt 'geërfd' door de phase diffusion-vergelijking. Als gevolg hiervan kan men aantonen dat de 'singulariteiten' stationair moeten zijn. Een reactie-diffusievergelijking heeft in het algemeen geen variationele structuur.

59 Peter Sloot in *De som der delen*, rede uitgesproken op 18 februari 1999 bij aanvaarding van het ambt van bijzonder hoogleraar in de Numerieke Natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam.

60 G. Seminara, 'Invitation to river morphodynamics', pp. 269–294 in *Nonlinear Dynamics and Pattern Formation in the Natural Environment*, A. Doelman, A. van Harten (eds), Pitman Research Notes in *Mathematics 335* (1995).

61 Zie bijvoorbeeld 'An Interview with Professor Sir Christopher Zeeman' in *Newsletter Eur. Math. Soc.*, 30, pp. 14–19 (1998).

62 Zie *De toekomst van het wiskunde-onderzoek in Nederland*, Verkenningen, deel I, van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen (1999).
63 Zie *Vitaliteit en kritische massa. Strategie voor de natuur- en technische wetenschappen*, Adviesraad voor het Wetenschaps- en Technologiebeleid, 41 (1999).
64 Zie noot 63.
65 Zie noot 63.
66 Volgens bijlage 7 van het KNAW-rapport genoemd bij noot 62 zijn er in 1999 in totaal 86 gewoon hoogleraren wiskunde in Nederland, 47 hiervan zijn 56 jaar of ouder.
67 Advies B2 op pagina 30 van het KNAW-rapport genoemd bij noot 62.
68 Zie ook de dies-rede van Wiktor Eckhaus van 3 april 1989, *Wiskunde van de chaos*, Universiteit Utrecht.
69 Naar aanleiding van de in het AWT-rapport (noot 63) berekende verhoudingen tussen het aantal hoogleraren en de instroom van eerstejaarsstudenten.